Seconde. Correction du contrôle n° 10

Sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé.

Pour tous événements A et B,

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice 2 (6 points)

Dans une production de 100 000 pièces d'usine, on tire au hasard une pièce et on contrôle sa qualité. À l'issue du contrôle, la pièce est soit acceptée, soit refusée, mais il arrive que le contrôle fasse des erreurs de diagnostic.

5% des pièces sont non valables (défectueuses).

2% des pièces valables sont refusées, et 80 % des pièces non valables sont refusées.

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant. Aucune justification n'est demandée.

	Acceptée	Refusée	Total
Valable	93 100	1 900	95 000
Non valable	1 000	4 000	5 000
Total	94 100	5 900	100 000

2. On définit les événements :
   — V : "La pièce est valable"
   — A : "la pièce est acceptée"

(a) Déterminer $P(V)$ et $P(A)$. Justifier.
Il y a équiprobabilité.
$P(V) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$.
$\boxed{\text{Donc } P(V) = \dfrac{95\,000}{100\,000} = 0,95.}$
$\boxed{\text{De même, } P(A) = \dfrac{94\,100}{100\,000} = 0,941.}$

(b) Traduire par une phrase $A \cap V$ et calculer sa probabilité.
$A \cap V$: "La pièce est valable et est acceptée".
$\boxed{P(A \cap V) = \dfrac{93\,100}{10\,000} = 0,931.}$

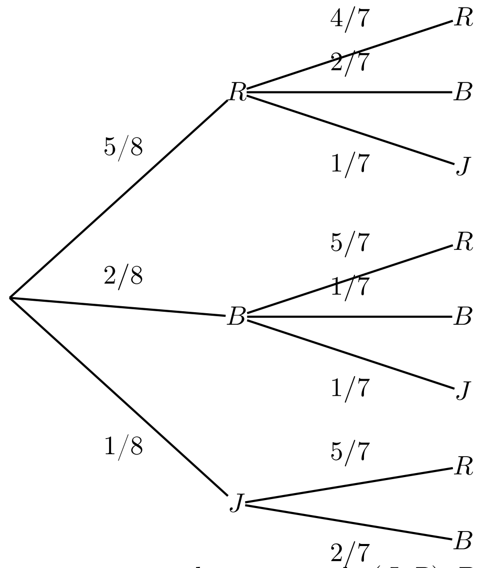
(c) Traduire par une phrase $A \cup V$ et calculer sa probabilité.
$A \cup V$: "La pièce est valable ou est acceptée".
$P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$.
$\boxed{P(A \cup V) = 0,941 + 0,95 - 0,931 = 0,96.}$

(d) Il y a une erreur de diagnostic si l'on accepte une pièce non valable ou si l'on refuse une pièce valable. Déterminer la probabilité de l'événement E : "il y a une erreur de diagnostic".
$E = (A \cap \overline{V}) \cup (\overline{A} \cap V)$.
Or, $A \cap \overline{V}$ et $\overline{A} \cap V$ sont incompatibles.
Donc $P(E) = P(A \cap \overline{V}) + P(\overline{A} \cap V)$
$P(E) = \dfrac{1\,000}{100\,000} + \dfrac{1\,900}{100\,000} = \dfrac{2\,900}{100\,000} = 0,029$.
$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait une erreur de diagnostic est de 0,029.}}$

Exercice 3 (5 points)

Une urne contient 5 boules rouges (R), 2 boules blanches (B), et 1 boule jaune (J). On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.



2. On note les issues par un couple, par exmple $(J; R)$. Décrire l'univers associé à cette expérience en listant toutes les issues possibles.
$\boxed{\Omega = \{(R;R); (R;B); (R;J); (B;R); (B;B); (B;J); (J;R); (J;B)\}}$

3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
$P(R;R) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$.

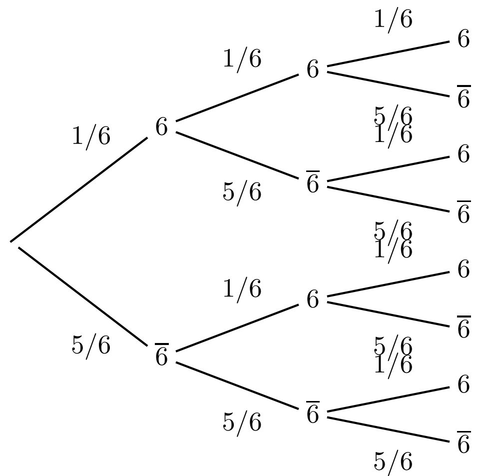
4. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.
$p = P(R;B) + P(B;R) + P(B;J) + P(J;B)$
$p = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{8} \times \dfrac{5}{7} + \dfrac{2}{8} \times \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$

Exercice 4 (7 points)
Dans un repère du plan, on considère la droite d d'équation

$$2x - y + 3 = 0.$$

1. Étudier par le calcul si points suivants appartiennent à d : $A(-2;7)$, et $B(4;11)$.
   $2 \times (-2) - 7 + 3 = -4 - 7 + 3 = -8 \neq 0$. $\boxed{\text{Donc } A \notin d.}$
   $2 \times 4 - 11 + 3 = 11 - 11 = 0$. $\boxed{\text{Donc } B \in d.}$
2. Déterminer les coordonnées du point C de d d'ordonnée égale à 5.
   Comme $C(x;5) \in d$, les coordonnes vérifient l'équation, soit
   $2x - 5 + 3 = 0$, puis $2x - 2 = 0$, et $x = 1$.
   Le point de d qui a une ordonnée égale à 5 est $C(1;5)$.
3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d.
   Avec le cours, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-b;a)$.
   Ainsi, $\overrightarrow{u}(1;2)$ est un vecteur directeur de d.
   Méthode 2 : $B(4;11)$, et $C(1;5)$ appartiennent à d, donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d.
   $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$, puis $\overrightarrow{BC}(-3;-6)$
   On vérifie facilement que ces 2 vecteurs sont colinéaires, $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{u}$.
4. On considère les points $E(5;-3)$ et $F(-4;1)$.
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (EF).
   Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dirige la droite (EF).
   $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$, soit $\overrightarrow{EF}(-9;4)$.
   $\overrightarrow{EF}(-9;4)$ est un vecteur directeur de la droite (EF).
   (b) En déduire une équation de la droite (EF).
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   $\overrightarrow{EM}(x-5;y+3)$. On rappelle $\overrightarrow{EF}(-9;4)$.
   $M \in (EF)$ ssi $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinaires.
   $M \in (EF)$ ssi $(x-5) \times 4 - (y+3) \times (-9) = 0$
   $M \in (EF)$ ssi $4x - 20 + 9y + 27 = 0$
   $M \in (EF)$ ssi $4x + 9y + 7 = 0$.
   Une équation de la droite (EF) est $4x + 9y + 7 = 0$.
   (c) Les droites (EF) et d sont-elles parallèles ? Justifier.
   On étudie si les vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}(1;2)$ et $\overrightarrow{EF}(-9;4)$ sont colinéaires.
   $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{EF}) = xy' - yx' = 1 \times 4 - 2 \times (-9) = 22 \neq 0$.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc les droites (EF) et d ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

Exercice 5 (Bonus, 2 points)
On lance un dé cubique équilibré trois fois de suite.
Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6.
Notons A : "on obtient au moins un 6".
Alors $\overline{A}$: "on n'obtient aucun 6"



$P(\overline{A} = P(\overline{6};\overline{6};\overline{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

La probabilité d'obtenir au moins un 6 sur 3 lancers est de $\frac{91}{216}$ soit environ 0,42.

Seconde. Interrogation n° 10. Sujet 2

Exercice 6 (cours, 2 points)
Compléter sur l'énoncé.

1. S'il y a équiprobabilité, alors $P(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas total}}$
2. Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx + p$ sont $(1; m)$
   Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation $x = k$ sont $(0; 1)$.

Exercice 7 (5 points)
Une enquête nous apprend que sur 400 ménages, 80 ont au moins un chien, 100 ont au moins un chat, et 20 ont à la fois au moins un chien et un chat.

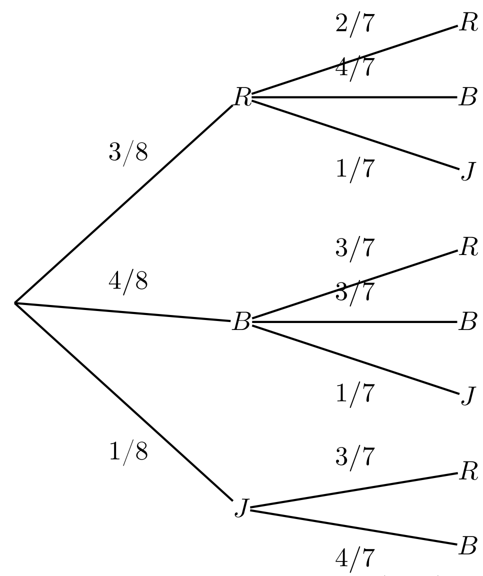
1. Compléter le tableau des effectifs suivant :

	Au moins un chien	Pas de chien	Total
Au moins un chat	20	**80**	100
Pas de chat	**60**	**240**	**300**
Total	80	**320**	400

2. On choisit un ménage au hasard. Tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis. On note :
   A : « Le ménage a au moins un chien » ; B : « Le ménage a au moins un chat » ;
   (a) Calculer $P(A)$. Justifier.
   D'après l'énoncé, « Tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis ». Il y a donc équiprobabilité.
   On calcule les probabilités des événements par la formule $\dfrac{nb\ de\ cas\ favorables}{nb\ de\ cas\ total}$. $\boxed{P(A) = \dfrac{80}{400} = 0.2.}$
   (b) Calculer $P(B)$.
   $\boxed{\text{De même, } P(B) = \dfrac{100}{400} = 0.25.}$
   (c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
   $\boxed{A \cap B : \text{« Le ménage a au moins un chien et au moins un chat ».}}$
   $\boxed{P(A \cap B) = \dfrac{20}{400} = 0.05.}$
   (d) Définir par une phrase l'événement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.
   $\boxed{A \cup B : \text{« Le ménage a au moins un chat ou au moins un chien ».}}$
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.2 + 0.25 - 0.05 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Donc la probabilité que le ménage ait un chat ou un chien est 0.4.}}$
   (e) Exprimer à l'aide des données de l'énoncé l'événement : « Le ménage n'a ni chien ni chat ». Calculer la probabilité de cet événement.
   $\boxed{\text{L'événement « Le ménage n'a ni chien ni chat » correspond à } \overline{A} \cap \overline{B}.}$
   $\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{240}{400} = 0.6.}$
   Autre méthode :
   On peut remarquer que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
   D'où $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Exercice 8 (5 points)
Une urne contient 3 boules rouges (R), 4 boules blanches (B), et 1 boule jaune (J). On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.



2. On note les issues par un couple, par exmple $(J; R)$. Décrire l'univers associé à cette expérience en listant toutes les issues possibles.
   $\boxed{\Omega = \{(R;R); (R;B); (R;J); (B;R); (B;B); (B;J); (J;R); (J;B)\}}$
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
   $P(R; R) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28}$.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.
   $p = P(R; B) + P(B; R) + P(B; J) + P(J; B)$
   $p = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{8} \times \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{8} \times \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{32}{56} = \dfrac{4}{7}$

Exercice 9 (7 points)
Voir sujet 1

Exercice 10 (Bonus, 2 points)
Voir sujet 1