Chapitre 3 : Taux d'évolution

I Taux d'évolution

Définition
Soient y_1, et y_2 deux nombres positifs, avec $y_1 \neq 0$.
Le taux d'évolution de y_1 à y_2 est le nombre

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}.$$

Remarque

1. L'évolution est une hausse ssi $t > 0$.
   L'évolution est une baisse ssi $t < 0$.
2. Attention en utilisant la calculatrice : pour calculer le taux d'évolution de y_1 à y_2, on doit taper $(y_2 - y_1)/y_1$ avec les parenthèses !
3. Pour interpréter le résultat en pourcentage, penser à multiplier par 100.
4. Un taux d'évolution n'est pas une proportion :
   — une proportion est toujours un nombre entre 0 et 1.
   — un taux d'évolution peut être n'importe quel nombre plus grand que -1.

Exercice 1
Un prix passe de 480 à 420 euros.
Calculer le taux d'évolution, et donner le résultat sous forme de pourcentage.
Réponse [1]

Remarque
La variation absolue de y_1 à y_2 est le nombre $(y_2 - y_1)$.

Exercice 2 (calcul mental)
Interpréter les taux d'évolution suivants en évolution exprimée en pourcentage. On arrondira à 0,1 % près.

1. $t = 0,327$
2. $t = -0,04$
3. $t = -0,73815$
4. $t = 2,3658$

I.1 Coefficient multiplicateur

Définition (et propriété)
Soient y_1, et y_2 deux nombres positifs, avec $y_1 \neq 0$.
Si t est le taux de y_1 à y_2, alors le coefficient multiplicateur pour passer de y_1 à y_2 est $c = 1 + t$.
Autrement dit, $y_2 = (1 + t) \times y_1$.

1. $t = \dfrac{420 - 480}{480} = -0.125$, soit une baisse de 12.5 %.

Démonstration
$t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$, donc $y_2 - y_1 = t \times y_1$. Donc $y_2 = y_1 + t \times y_1 = (1+t) \times y_1$. □

Remarque
La formule s'applique aussi dans le cas d'une baisse (où $t < 0$).
Dans le cas d'une hausse, $c > 1$.
Dans le cas d'une baisse, $c < 1$.

Exercice 3 (calcul mental)
Donner le taux puis le coefficient multiplicateur associé aux évolutions suivantes :

1. une hausse de 6 %
2. une hausse de 0,35 %
3. une baisse de 12 %
4. une baisse de 7 %

Remarque
La formule $y_2 = (1+t)y_1$ peut être est utilisée lorsqu'on cherche y_2, mais aussi lorsqu'on cherche y_1.
En effet, pour $t > -1$, on a $y_1 = \dfrac{y_2}{(1+t)}$.

Exercice 4
Après une remise de 20%, un article coûte 127,2 euros. Quel était son prix initial ?

Exercice 5
Compléter le tableau. On ne demande pas de justifier les résultats.

valeur initiale	valeur finale	taux d'évolution	coefficient multiplicateur	évolution en pourcentage
480	530			
5000		-0,13		
250				hausse de 22%
7250			0,91	
	1300		1,06	

II Évolutions successives, taux global

Théorème
Si une grandeur subit deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, alors le taux d'évolution global est donné par :
$$1 + t_g = (1+t_1) \times (1+t_2)$$
On retiendra que le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs :
$$c_g = c_1 \times c_2.$$

Remarque
Attention, pour calculer le taux global t_g, on a donc
$$t_g = (1+t_1)(1+t_2) - 1$$

Exemple :
Un prix augmente de 15 % , puis de 20 %. Calculer le taux d'augmentation global.

$$\begin{aligned} 1+t_g &= (1+t_1)(1+t_2) \\ 1+t_g &= 1,15\times 1,2 \\ t_g &= 1,15\times 1,2-1 \\ t_g &= 0,38 \end{aligned}$$

Le prix a globalement augmenté de 38 %.

Remarque
Attention : en général, le taux global n'est pas la somme des taux des évolutions.

Théorème (généralisation)
Si une grandeur subit n évolutions successives de taux $t_1, t_2, \ldots, t_n$ alors le taux d'évolution global t_g est donné par

$$\boxed{1+t_g = (1+t_1)\times(1+t_2)\times\cdots\times(1+t_n)}$$

Autrement dit, pour trouver le coefficient multiplicateur global, on multiplie les coefficients multiplicateurs : $c_g = c_1\times c_2\times\cdots\times c_n$.

Exercice 6
Déterminer le taux global d'évolution à l'issue d'une hausse de 40 % suivie d'une baisse de 40%.

Remarque
On ne revient pas à la valeur de départ si l'on effectue une hausse de 40 % suivie d'une baisse de 40 %.

III Taux d'évolution réciproque

Théorème
Si le taux d'évolution pour passer de y_1 à y_2 est t, le taux t' de l'évolution réciproque (qui passe de y_2 à y_1) est donné par :

$$1+t' = \frac{1}{1+t}$$

On retiendra que les coefficients multiplicateurs sont inverses l'un de l'autre : $c' = \frac{1}{c}$.

Exercice 7
Déterminer l'évolution réciproque d'une baisse de 20 %.