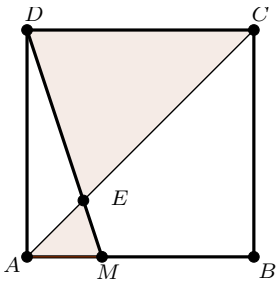
Devoir maison n° 9
À rendre le vendredi 06 avril 2018

Exercice 1



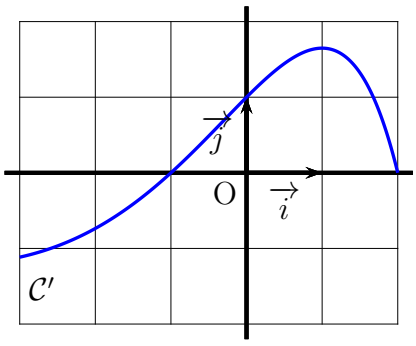
On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$.
Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E.
Le but du problème est de déterminer l'aire colorée minimale, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

1. **Étude expérimentale**
   (a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   (b) On s'intéresse à la valeur minimum de l'aire de la surface colorée, que l'on note $\mathcal{A}$. Quelle variable, notée x, choisir ?
   (c) Faire afficher par le logiciel le lieu des points de coordonnées $(x, \mathcal{A})$.
   (d) Émettre une conjecture qui répond au problème posé.
2. **Étude algébrique**
   On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteurs issues de E dans les triangles EAM et ECD.
   (a) À quel intervalle appartient x ?
   (b) Démontrer que $EH = \dfrac{x}{x+1}$ et $EK = \dfrac{1}{x+1}$
   (c) En déduire qu'une expression de l'aire colorée est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.
   (d) Démontrer la conjecture du 1.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée f'** de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



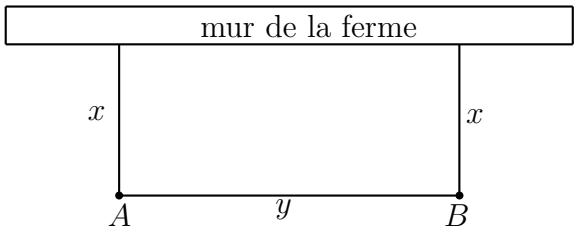
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier la réponse.**

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geq -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

Exercices sur les applications de la dérivation

Exercice 1

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire le long du mur de sa maison.
Ce poulailler doit avoir une aire de 288 m^2.
Le but du problème est de déterminer où on doit placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.

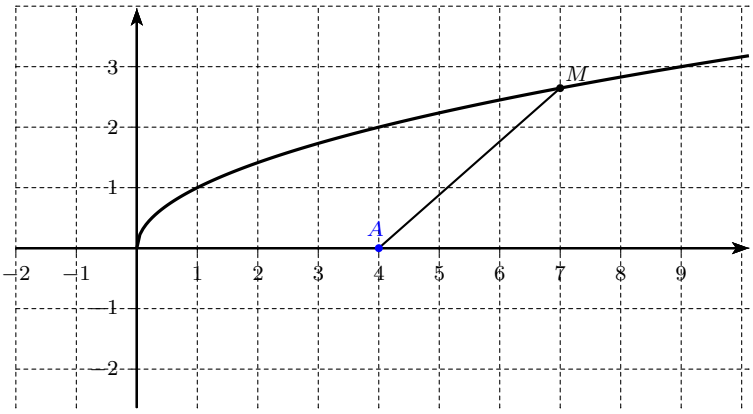


La figure ci-contre représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*.
On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.

1. Sachant que l'aire du poulailler est 288 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur du grillage est, pour $x > 0$, $l(x) = \dfrac{2x^2 + 288}{x}$.
3. Calculer la dérivée de l.
4. Étudier les variations de l sur $]0; +\infty[$.
5. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(4; 0)$ et la courbe de la fonction f définie qur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout $x \geqslant 0$, on appelle M le point d'abscisse x sur la courbe de f.
Le but de l'exercice est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x la distance AM est minimale et la valeur de ce minimum.



1. Justifier que la distance AM a pour expression $D(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.
2. Déterminer le tableau de variation de $x \mapsto x^2 - 7x + 16$ sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire les variations de la fonction distance D et les réponses au problème.

Exercice 3

Démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $0 \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Indication : on pourra étudier une fonction.