

BTS CRSA2. Correction de l'interrogation n° 3

Exercice 1

Compléter les tableaux.

1. Dérivée

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$f(x) = -5x^3$	$-15x^2$
$f(x) = x^2 + 7$	$2x$
$f(x) = \cos(5x)$	$-5 \sin(5x)$
$f(x) = \sin(2x + \pi)$	$2 \cos(2x + \pi)$
$f(x) = e^{-3x}$	$-3e^{-3x}$
$f(x) = \frac{1}{5x+1}$	$-\frac{5}{(5x+1)^2}$
$f(x) = \ln(x)$	$\frac{1}{x}$

2. Primitive

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$
$f(x) = 2x + 5$	$x^2 + 5x$
$f(x) = -4$	$-4x$
$f(x) = e^{4x}$	$\frac{1}{4}e^{4x}$
$f(x) = x^2 + 3x^3$	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$
$f(x) = e^{-3x}$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
$f(x) = \frac{1}{5x+1}$	$\frac{1}{5} \ln(5x+1)$
$f(x) = \cos(2x)$	$\frac{1}{2} \sin(2x)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x + e^x$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ est $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

$$m = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (x + e^x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + e^x \right]_0^2$$

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} + e^2 - (0 + e^0) \right) = \frac{1}{2} (2 + e^2 - 1) = \frac{1 + e^2}{2}$$

Exercice 3 (intégration par parties)

1. Compléter.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont continues sur I , alors, quels que soient les réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

2. On cherche à calculer $I = \int_0^1 e^{-2x}(x+4) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

On pose $u'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x + 4$.

(a) Préciser des expressions possibles pour $u(x)$ et $v'(x)$.

$$u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \text{ et } v'(x) = 1.$$

(b) Calculer I .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-2x}(x+4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(x+4) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{-2x} \times 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} [(x+4)e^{-2x}]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} (5e^{-2} - 4e^0) + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \quad \text{avec } e^0 = 1 \\ &= -\frac{5}{2}e^{-2} + 2 - \frac{1}{4}(e^{-2} - e^0) \\ &= -\frac{5}{2}e^{-2} + 2 - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{-11e^{-2} + 9}{4} \end{aligned}$$