

1 Second degré

Exercice 1 (positions relatives)

Étudier par le calcul la position relative des courbes de f et de g .

Rappel de la méthode : on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

Sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, \mathcal{C}_f est située au-dessus de \mathcal{C}_g .

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$, et $g(x) = -x - 3$.
2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$, et $g(x) = x - 3$.

Exercice 2 (variante d'un ex traité en classe, fiche photocopiée)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

On appelle \mathcal{P} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.
2. Étudier le signe de f sur \mathbb{R} . Justifier.
3. Dresser le tableau de variation de f . Justifier.
4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$. Étudier la position relative de la parabole \mathcal{P} et de la droite (d) .
5. Pour tout réel p , on considère la droite (\mathcal{D}_p) d'équation $y = 2x + p$.
Déterminer algébriquement le nombre de points d'intersection de (\mathcal{D}_p) et \mathcal{P} suivant les valeurs de p .

Exercice 3 (variante du devoir commun)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
2. Déterminer le tableau de variation de f . Justifier.
3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-1 \leq x \leq 3$. Justifier.
4. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = 3x + 6$.
Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{D} et de \mathcal{C} .
5. Pour tout nombre k réel, on appelle \mathcal{D}_k la droite d'équation $y = 3x + k$.
Déterminer tous les réels k tels que la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}_k aient exactement deux points d'intersection.

Exercice 4

Étudier par le calcul la position relative des courbes de f et de g .

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$, et $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Indication : pour le signe de $f(x) - g(x)$, il faut factoriser en mettant l'expression au même dénominateur $2x$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ et la fonction

affine g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

On note respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) - g(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{4x}$.

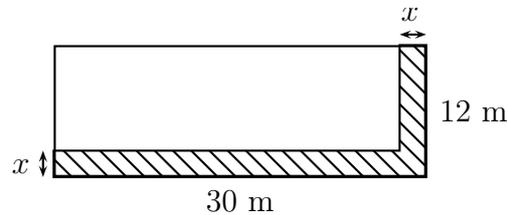
2. Étudier la position relative des courbes de f et de g . Justifier.

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$. Justifier.

Exercice 7 (5 points)

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. On souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2 .
Montrer que cela se traduit par l'inéquation

$$x^2 - 42x + 80 \geq 0.$$

2. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Exercice 8

Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$.

1. On considère l'affirmation suivante : « Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$. »
 - (a) L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
 - (b) Énoncer la réciproque de l'implication précédente.
 - (c) Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
2. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.
« Si $a + b + c = 0$, alors 1 est racine de f . »

Exercice 9

Deux entiers naturels ont pour différence 7 et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Quels sont-ils ?

Exercice 10

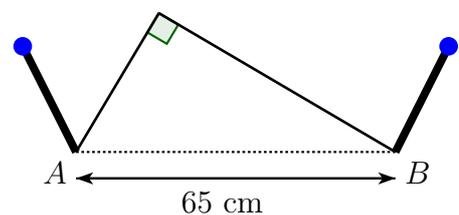
Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second dont la courbe a pour sommet le point $S(-2; -5)$ et passe par le point $A(1; 4)$.

Exercice 11

Les extrémités A et B d'une ficelle sont fixées à deux clous distants de 65 cm.

On forme avec cette ficelle un triangle ABC comme l'indique la figure ci-contre.

1. Peut-on former un triangle rectangle en C dans le cas où la longueur de la ficelle est 85 cm ?
2. Est-il toujours possible de former un triangle rectangle en C , quelle que soit la longueur de la ficelle ?



2 Opérations et sens de variation

Exercice 12

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-6; 4]$.

x	-6	-2	1	4
$f(x)$	3	12	6	8

1. Comparer $f(-1)$ et $f(0)$. Justifier.
2. On pose $g(x) = \frac{3}{f(x)}$.
 - (a) Justifier que g est bien définie sur $[-6; 4]$.
 - (b) Donner sans justifier le tableau de variation de la fonction g .
3. Pour tout $x \in [-6; 4]$, on pose $h(x) = -2f(x) + 1$.
Donner sans justifier le tableau de variation de h .
4. Soit A la fonction définie par $A(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - (a) Justifier que A est bien définie sur $[-6; 4]$.
 - (b) Donner le tableau de variation de A .

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Justifier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$,

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer le tableau de variations de f sur son ensemble de définition

3 Valeur absolue

Exercice 15

1. Exprimer $f(x) = -x - 4 + 2|3 - x|$ sans valeur absolue.
2. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 16

1. Écrire les réels suivants sans valeur absolue : $|\sqrt{2} - 1|$, $|\pi + 1|$, $|1 - \sqrt{3}|$
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x - 6 + 2|x + 2|$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
 - (a) Exprimer $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
 - (b) Tracer la courbe représentative de f en justifiant votre graphique.
 - (c) Résoudre graphiquement l'équation $-x - 6 + 2|x + 2| = 2$.

Exercice 17

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + |x| - |2x - 6|$.

1. Calculer $f(2)$, $f(-1)$ et $f(10)$.
2. Justifier que si $x \leq 0$, $f(x) = x - 5$.
3. En distinguant les cas, exprimer sans valeur absolue $f(x)$ en fonction de x .
4. Compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche l'image $f(x)$ d'un nombre x par f .
DÉBUT
Entrer x
Si $x \geq \dots$
Alors y prend la valeur ...
Sinon
 Si $x \geq 0$
 Alors y prend la valeur ...
 Sinon y prend la valeur $x - 5$
 Fin Si
Fin Si
Afficher y
FIN
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère. Justifier.

4 Vecteurs et droites

Exercice 18 (variante du devoir commun)

1. Déterminer une équation de la droite (AB) passant par les points $A(1; 2)$ et $B(4; -4)$.
2. Déterminer une équation de la droite (d) passant par $C(0; -2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire le point de (d) d'abscisse 10.
4. Montrer que les droites (AB) et (d) sont sécantes.
5. Déterminer le point E d'intersection de (AB) et (d) .

Exercice 19 (sytèmes à résoudre)

Déterminer par le calcul l'intersection des deux droites.

1. $(d_1) : 3x - y - 2 = 0$, et $(d_2) : y = 2x + 8$.
2. $(d_1) : x - 5y + 1 = 0$, et $(d_2) : 2x + y - 4 = 0$.
3. $(d_1) : -3x + 4y + 11 = 0$, et $(d_2) : 2x + 3y + 4 = 0$.

Exercice 20

On se place dans un repère du plan.

On considère les points $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$ et $C(-1; 2)$, et la droite Δ d'équation $2x + y - 7 = 0$.

1. Justifier que Δ passe par B .
2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ .
3. Montrer que les droites (AC) et Δ sont parallèles.
4. Déterminer une équation de la droite (d) parallèle à (BC) passant par A .

Exercice 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(3; 1)$ et $C(-2; 3)$.

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
2. (a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB}$.
Lire les coordonnées du point E sur le graphique.
- (b) Retrouver les coordonnées de E par le calcul.
3. Montrer que les points B , D et E sont alignés.