

Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence

I Récurrence simple

Propriété

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier naturel n .

Soit n_0 un entier naturel.

Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : pour tout entier $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie ;

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque (explication)

Si on a $P(0)$ vraie, et pour tout $k \geq 0$ ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$), alors :

- $P(0)$ est vraie et ($P(0) \Rightarrow P(1)$) donc $P(1)$ est vraie.
- $P(1)$ est vraie et ($P(1) \Rightarrow P(2)$) donc $P(2)$ est vraie.
- En poursuivant "de proche en proche" ce raisonnement, on a $P(n)$ vraie pour tout entier $n \geq 0$.

On peut faire l'analogie avec les dominos :

si l'on renverse le premier domino, et que chaque domino en tombant renverse le suivant, alors tous les dominos tombent.

Exemple :

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

Solution

On raisonne par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on va montrer la propriété $P(n)$: " $4^n - 1$ est divisible par 3".

- Initialisation : $P(0)$ est vérifiée, car $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 3.
- Hérédité : Soit un entier $k \geq 0$:
Supposons que la propriété $P(k)$: " $4^k - 1$ est divisible par 3" est vraie.
Montrons $P(k+1)$: " $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3".
On a :

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= \underbrace{3 \times 4^k}_{\text{divisible par 3}} + \underbrace{4^k - 1}_{\substack{\text{divisible par 3} \\ \text{(hypothèse de récurrence)}}} \end{aligned}$$

Par somme de nombres divisibles par 3, $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.

- Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Remarque

1. La propriété $P(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, etc.
2. La condition d'hérédité est une implication : on montre, pour un entier $k \geq n_0$, que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Une propriété $P(n)$ qui vérifie cette deuxième condition est dite héréditaire.

3. L'initialisation est importante (une propriété héréditaire peut ne pas être toujours vraie). Par exemple, la propriété $P(n)$: "L'entier n est plus grand que 10" est héréditaire, mais elle n'est pas vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

II Exercices

Exercice 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Valider cette conjecture en raisonnant par récurrence.

Exercice 2

1. Montrer que la propriété $P(n)$: " $4^n + 1$ est divisible par 3" est héréditaire.
2. Peut-on en conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 4

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
3. Que peut-on en déduire?

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété $4^n \geq 4n + 1$.

1. Étudier $P(0), P(1), P(2)$.
2. Soit $k \geq 2$. Montrer que la propriété est héréditaire, soit $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$.
3. Que peut-on conclure?

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier n , $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$.

III Compléments

III.1 Récurrence double

Remarque

Avec la récurrence simple, la véracité se propage d'un rang au rang suivant (dominos).

Avec la récurrence double, la véracité à un rang donné dépend de la véracité aux deux rangs précédents.

Ex : $(P(4) \text{ et } P(5) \text{ vrais}) \Rightarrow (P(6) \text{ vraie})$.

Propriété (récurrence double)

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier naturel n .

Soit n_0 un entier naturel.

Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie **et** $P(n_0 + 1)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : pour tout entier $k \geq n_0$, si $P(k)$ et $P(k + 1)$ sont vraies alors $P(k + 2)$ est vraie ;

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 8 (la suite de Fibonacci)

La suite (F_n) est définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : F_n < 2^n$.

Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation.
Vérifier la véracité de $P(0)$ et $P(1)$.
2. Hérédité : Soit k un entier, $k \geq 0$. On suppose $P(k)$ et $P(k + 1)$ vraies. Montrer que $P(k + 2)$ est vraie.
3. Conclure.

Remarque

En récurrence double, une seule brique ne pousse rien : il faut deux rangs de départ pour amorcer la chaîne (initialisation), et aussi deux rangs à supposer dans l'hérédité.

III.2 Récurrence forte

La récurrence forte va permettre de démontrer des propriétés dont la véracité à un rang donné dépend de la véracité à tous les rangs précédents.

Propriété

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier naturel n .

Soit n_0 un entier naturel.

Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : pour tout entier $k \geq n_0$, si $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$, $\dots$, $P(k)$ sont vraies alors $P(k + 1)$ est vraie ;

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 3n$.

Procéder par récurrence forte. On rappelle que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la propriété $u_n = 3n$.

- Initialisation : On a $u_1 = 3 = 3 \times 1$ et donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit un entier $k \geq 1$, supposons que $P(1), \dots, P(k)$ sont vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k u_i \\ &= \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k 3i \\ &= \frac{6}{k} \sum_{i=1}^k i \\ &= \frac{6}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit que $u_{k+1} = 3(k+1)$ et donc que $P(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$, c'est-à-dire $u_n = 3n$.