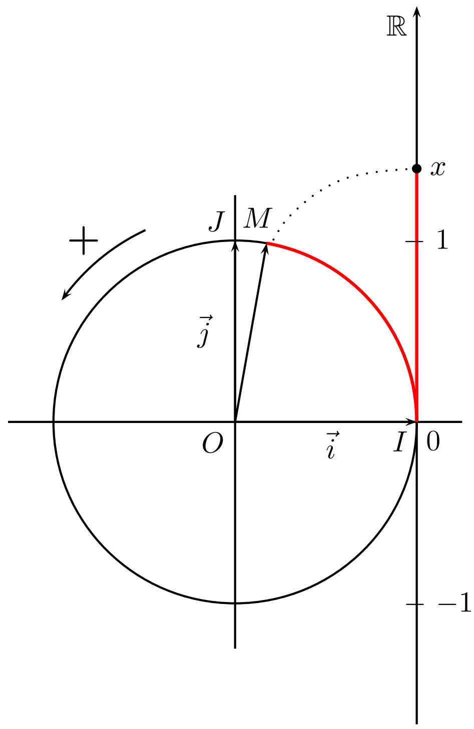
Chapitre 6 : Trigonométrie

I Le cercle trigonométrique

Remarque
L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.



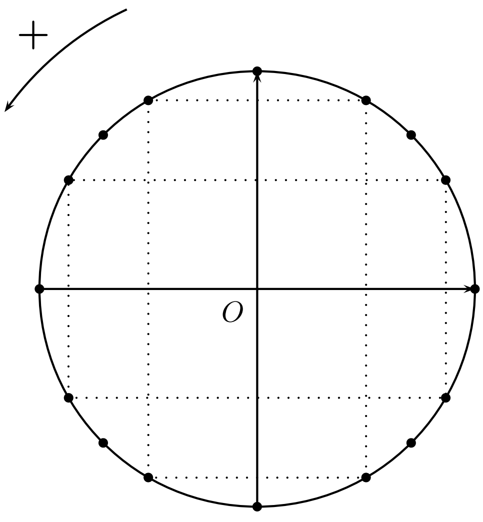
Définition
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I.
Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.
On dit que M est l'image de x sur le cercle.

Remarque
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc 2π.

Exercice 1
Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

1. 0, π, 2π, 3π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.

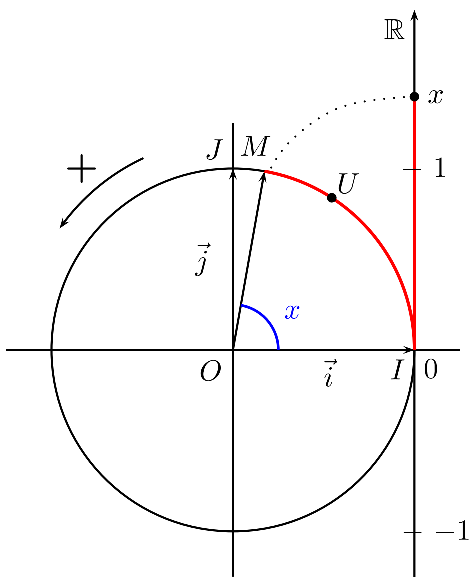


Propriété
Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi leur différence est un multiple de 2π. Les réels x et x' ont la même image ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = k \times 2\pi$.

Exercice 2
Les réels suivants ont-ils la même image sur le cercle ?

1. $a = 13\pi$ et $b = 4\pi$.
2. $a = \dfrac{5\pi}{4}$ et $b = \dfrac{-19\pi}{4}$.

Définition
Soit U l'image du nombre 1 sur le cercle trigonométrique.
Un radian est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOU}$ interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.



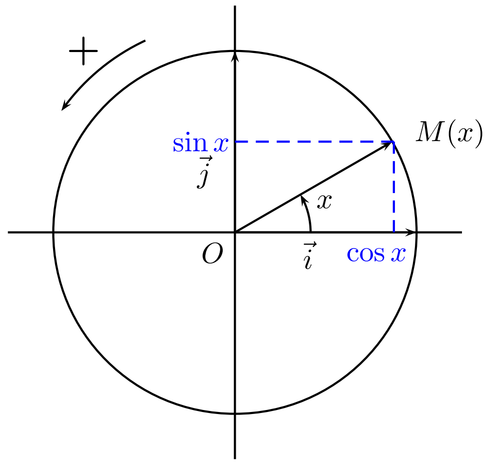
Remarque
1. Lorsque $x \in [0;\pi]$, la longueur x de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OM}$ correspond à la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.
2. Correspondance degré - radian

degres	360	180	90	60	45	30	20
radians	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{9}$

II Trigonométrie

II.1 Cosinus et sinus d'un réel

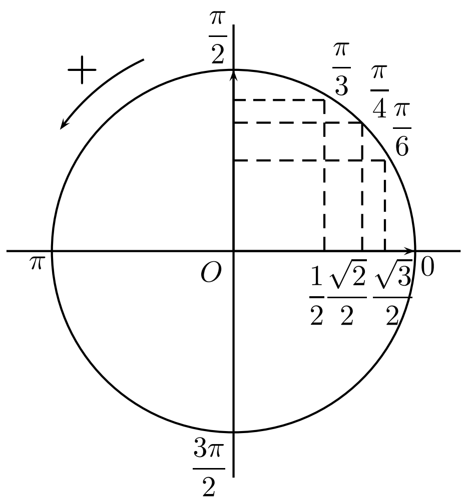
Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\sin x$.



Propriété (Conséquences immédiates)
Pour tout x réel, on a :
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstration
On démontre $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$ Soit A l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
Le triangle IOA est isocèle en O et l'angle $\widehat{IOA}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ (60 degrés).
Par sommes des angles, les angles à la base mesurent aussi $\frac{\pi}{3}$.
Le triangle OIA est donc équilatéral.
Les hauteurs sont donc aussi des médianes dans ce triangle.
Le pied H de la hauteur issue de A est donc le milieu de $[OI]$, et $OH = \frac{1}{2}$.
On a donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\sin^2\frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Donc $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Comme $0 \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.

Donc $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$

Soit B l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle, et H le pied de la hauteur issue de B dans IOB. Le triangle OBH est rectangle isocèle en H.

Le caractère isocèle se traduit par $HO = HB$, soit $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.

D'après le théorème de Pythagore, $HO^2 + HB^2 = 1$, soit $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$.

$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, $\cos\frac{\pi}{4} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, il vient aussi $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

III Compléments : angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) \\
\sin(-x) &= -\sin(x) \\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x)
\end{aligned}$$