Chapitre 1 : Suites arithmétiques. Suites géométriques.

I Suites arithmétiques

I.1 Définition et propriétés

Définition
Une suite (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre réel r. Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.
Une suite arithmétique de raison r est donc définie par la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : $4\,;\ 7\,;\ 10\,;\ 13\,;\ 16\,;\ 19$ sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

Exercice 1
Chercher le 4e terme de la suite arithmétique (u_n) de raison -7 et de premier terme $u_0 = 10$.

Remarque
Une suite (u_n) est arithmétique ssi $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Cette constante est alors la raison r.

Théorème (terme général d'une suite arithmétique de raison r)
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) a pour premier terme u_1, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Exercice 2
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 4$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{21}.
3. Un terme de la suite vaut-il 2015 ?

Remarque
Une suite arithmétique est toujours monotone (strictement croissante ssi $r > 0$, et strictement décroissante ssi $r < 0$).

Propriété (représentation graphique d'une suite arithmétique)
Une suite arithmétique est représentée graphiquement par un nuage de points alignés.
Réciproquement, si une suite est représentée par un nuage de points alignés, alors la suite est arithmétique.

Remarque
Les suites arithmétiques sont la restriction à $\mathbb{N}$ des fonctions affines.
Si $u_n = u_0 + nr$, alors la suite est représentée par les points de coordonnées $(u; u_n)$ qui sont sur la droite d'équation $y = rx + u_0$.
Comme les points qui représentent un suite arithmétique sont alignés, on parle de croissance linéaire.

Exercice 3
Chloé a un oncle très généreux qui lui a offert à sa naissance en 2014 une tirelire contenant 400 euros. De plus, chaque année, pour son anniversaire, il y rajoute la somme de 75 euros. On note u_n la somme contenue dans la tirelire à l'année $2014 + n$.

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est arithmétique et déterminer sa raison.
2. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.
3. Quelle somme d'argent pourra récupérer Chloé à sa majorité ?

I.2 Moyenne arithmétique

Définition
La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Propriété
Si a, b, et c sont trois termes consécutifs (dans cet ordre) d'une suite arithmétique, alors le terme central b est la moyenne arithmétique des deux autres nombres a et c.

Démonstration
On a, en notant r la raison de la suite, $b = a + r$, et $c = b + r$. Donc $a = b - r$.
Ainsi, $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$. □

Exercice 4
Soit une suite arithmétique (u_n) telle que $u_{11} = 2,6$ et $u_{13} = 4,1$.

1. Calculer u_{12}.
2. En déduire la raison de la suite.

I.3 Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété (somme des premiers nombres entiers)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration
$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$S_n = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 2 + 1$
En additionnant membre à membre, il vient
$2 \times S_n = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)$
$2 \times S_n = n \times (n+1)$, donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Exercice 5
Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 400$.

Théorème (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$
2. En partant de u_1, on a pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$
3. De façon générale, pour la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :
$$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\cdots+(u_0+nr) \\ &= (n+1)u_0+r(1+2+\cdots+n) \\ &= (n+1)u_0+\frac{rn(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\frac{2u_0+nr}{2} \\ &= (n+1)\frac{u_0+(u_0+nr)}{2} \\ &= \frac{u_0+u_n}{2}\times(n+1) \end{aligned}$$

Exercice 6
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=3$ et de raison $r=8$.
Déterminer la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n).

Remarque (le symbole sigma $\sum$)
Pour éviter les points de suspension, on peut noter $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$, qui se lit "somme pour k variant de 0 à n des u_k".
Par exemple,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{3}u_k=u_1+u_2+u_3$, et $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}i^2=0^2+1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$

II Suites géométriques

Dans ce paragraphe, on se limite aux suites à termes positifs (le premier terme et la raison sont toujours positifs).

II.1 Définition et terme général

Définition
Une suite géométrique est une suite où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre non nul q appelé la raison.

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n\times q$$

Exemple : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 sont les premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 (ce sont les puissances successives de 2).

Remarque
Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que $u_{n+1}=u_n\times$ constante ou bien, pour $u_n\neq 0$,que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=$ constante, (cette constante st alors la raison).

Exercice 7
Étudier si les suites sont géométriques. $A_n=2\times 5^n$, $B_n=n^2+1$, $C_n=\dfrac{3^{n+1}}{5^n}$.

Théorème (terme général d'une suite géométrique)
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q.

1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n=u_0\times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_1, alors pour tout $n\geqslant 1$, $\quad u_n=u_1\times q^{n-1}$.

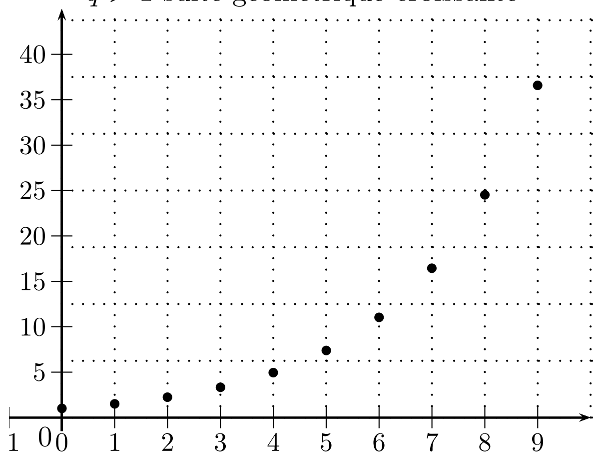
Exercice 8
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=9$ et de raison $q=-\dfrac{1}{3}$. Calculer u_5.

II.2 Représentation graphique et variation d'une suite géométrique

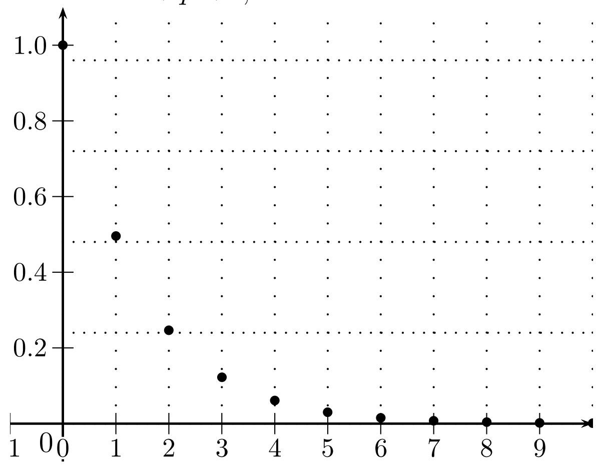
Une suite géométrique est représentée par un nuage de points situés sur une courbe de fonction exponentielle (croissante ou décroissante).
On parle de croissance ou décroissance exponentielle pour qualifier des phénomènes qui évoluent par une suite géométrique.

Illustrations

$q > 1$ suite géométrique croissante



$0 < q < 1$, suite décroissante



Remarque
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$ et différente de 1.

1. Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

II.3 Moyenne géométrique

Définition
La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est $g = \sqrt{ab}$ (c'est côté du carré de même aire que le rectangle $a \times b$).

Remarque
Si 3 nombres positifs a, b, et c sont des termes positifs consécutifs (dans cet ordre) d'une suite géométrique, alors le terme central b est la moyenne géométrique des deux autres nombres a et c.

II.4 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème (somme des premiers termes d'une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On suppose $q \neq 1$.

1. Si le premier terme est u_0, alors $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si le premier terme est u_1, alors $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

On retiendra :

$$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Application :
Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$.
$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \dfrac{1-2^9}{1-2} = \dfrac{1-512}{-1} = 511$.