CRSA2 – Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1 (variante)

On se propose de résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(1+x)\dfrac{dy}{dx} - 2y = \ln(1+x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
   L'équation homogène associée à (E) est (H) : $(1+x)y' - 2y = 0$.
   Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, $1+x>0$, on peut diviser par $(1+x)$.
   Cela équivaut à $y' - \dfrac{2}{1+x}y = 0$.
   En posant $a(x) = -\dfrac{2}{1+x}$, une primitive de a est la fonction A définie par $A(x) = -2\ln(1+x)$.
   En effet, $A'(x) = -2 \times \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{2}{1+x} = a(x)$.

   Les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions f définies par $f(x) = k\mathrm{e}^{2\ln(1+x)} = k\mathrm{e}^{\ln((1+x)^2)} = k(1+x)^2$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}$ est une solution de (E).
   Pour tout $x > -1$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+x} - 0 = -\dfrac{1}{2(1+x)}$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}(1+x)\times g'(x) - 2\times g(x) &= (1+x)\times\frac{-1}{2(1+x)} \\ &\quad -2\times\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2} \\ &= \ln(1+x)\end{aligned}$$

   Donc g est bien une solution particulière de (E).

3. En déduire les solutions de (E).

   Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par
   $$f(x) = k(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.
   $f(0) = 0$ ssi $k \times 1 - \dfrac{1}{2}\ln(1) - \dfrac{1}{4} = 0$ ssi $k = \dfrac{1}{4}$ (car $\ln(1) = 0$).

   La solution de (E) vérifiant $f(0) = 0$ est la fonction f définie par
   $$f(x) = \frac{1}{4}(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 (variante)

Soit (E) : $2x' + x = 2$, où x est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
   $2x' + x = 0$ ssi $x' + \dfrac{1}{2}x = 0$.
   On a $a(t) = \dfrac{1}{2}$, dont une primitive a pour expression $A(t) = \dfrac{1}{2}t$.

   Les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E).
   On pose $g(t) = c$. Alors $g'(t) = 0$.
   g est solution de (E) ssi $2g'(t) + g(t) = 2$
   ssi $2 \times 0 + c = 2$ ssi $c = 2$.

   La fonction constante égale à 2, $g(t) = 2$ est solution de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par
   $$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 2, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $x(0) = 1$.
   $f(0) = 1$ ssi $k\mathrm{e}^0 + 2 = 1$ ssi $k + 2 = 1$ ssi $k = -1$.

   La solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f définie par
   $$f(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 2$$