1STI3 - Mathématiques spécialité
Correction du travail à distance n°4.

Exercices 18, 19, 20, 23, 27 page 221. Exercices 28, 29, 30 page 221, et 60 page 223.

Exercice 1 (18 page 221)

Pour cet exerice, on donne la forme trigonométrique directement à l'aire de considérations géométriques (comme l'exemple de cours) car les nombres complexes ont leur image sur un axe du repère.

1. $z = -3\mathrm{i}$ est imaginaire pur de partie imaginaire négative : $|-3\mathrm{i}| = 3$ et $\arg(-3\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$.
2. De même pour $z' = 701$ est une nombre réel positif, $|701| = 701$, et $\arg(701) = 0$.

Exercice 2 (19 page 221)

Mettons $z = 6 - 6\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
$r = |z| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
Notons θ un argument de z.
$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-6}{6\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{Donc } z = 6\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \left[6\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right].}$$

Exercice 3 (20 page 221)

$z = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ est imaginaire pur de partie imaginaire négative.
$|z| = \left|-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{2}$, et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4 (23 page 221)

$z = 1 + \mathrm{i}$, et $z' = -2\mathrm{i}$.

1. Module et argument de z et z'.
   $|z| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.
   $$\boxed{\text{Donc } z = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right].}$$
   Comme $z' = -2\mathrm{i}$, on peut donner directement $|z'| = 2$ et $\arg(z') = -\dfrac{\pi}{2}$.
   $$\boxed{\text{Donc } z = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = \left[2; -\frac{\pi}{2}\right].}$$

2. Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.
   L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses.
   Ici, $\overline{z} = 1 - \mathrm{i}$. On en déduit que $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{2}$, et $\arg(\overline{z}) = -\dfrac{\pi}{4}$.
   Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors $-z = -a - \mathrm{i}b$.
   L'image de $(-z)$ est symétrique de l'image de z par la symétrie de centre O.
   Ici, $-z' = -(-2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$. On en déduit que $|-z'| = 2$ et $\arg(-z') = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Par propriété de cours, on a
   $|z \times z'| = |z| \times |z'| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$.
   $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$.
   $|z'^2| = |z'|^2 = 2^2 = 4$.
   $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 (27 page 221)
$z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$\boxed{\text{La forme algébrique de } z \text{ est } z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}.}$

Exercice 6 (28 page 221)
Comme $|z| = 2$ et $\arg(z) = \pi$, on a $z = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 2(-1 + 0\mathrm{i}) = -2$.

$\boxed{\text{La forme algébrique de } z \text{ est } z = -2 \ (z \text{ est un nombre réel}).}$

Exercice 7 (29 page 221)
On a $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Déterminons sa forme trigonométrique.
$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
Notons θ un argument de z.
$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2}$.
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

$\boxed{\text{Donc } z = 2\left(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\dfrac{\pi}{3})\right) = \left[2; \dfrac{\pi}{3}\right].}$

Exercice 8 (30 page 221)
Si $z = -5$, alors $|z| = 5$ et $\arg(z) = \pi$.

$\boxed{\text{Donc sous forme trigonométrique, } z = [5; \pi].}$

Déterminons la forme trigonométrique de z^{2019}.
Par propriété de cours, $|z^{2019}| = |z|^{2019} = 5^{2019}$.
Ensuite, $z^{2019} = (-5)^{2019} = -5^{2019}$ qui est un nombre réel strictement négatif.
Donc $\arg(z^{2019}) = \pi$.

$\boxed{\text{Ainsi, sous forme trigonométrique, } z^{2019} = [5^{2019}; \pi].}$

Déterminons la forme trigonométrique de $\dfrac{3}{z}$.

Par propriété de cours, $\left|\dfrac{3}{z}\right| = \dfrac{|3|}{|z|} = \dfrac{3}{5}$.

Pour l'argument, $\dfrac{3}{z} = \dfrac{3}{-5} = -\dfrac{3}{5}$ qui est un nombre réel strictement négatif.

Donc $\arg \dfrac{3}{z} = \pi$.

$\boxed{\text{Sous forme trigonométrique, } \dfrac{3}{z} = \left[\dfrac{3}{5}; \pi\right].}$

Exercice 9 (60 page 223)

Déterminer la forme trigonométrique.

1. $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   $r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{2}$.
   On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.
   $\boxed{\text{Donc } z = 2\left(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right) = \left[2; -\dfrac{\pi}{6}\right].}$
2. $z = 1 - \mathrm{i}$
   $r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.
   $\boxed{\text{Donc } z = \sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right) = \left[\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right].}$
3. $z = -3 - 3\mathrm{i}$
   $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On en déduit que $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ (ou $\dfrac{5\pi}{4}$).
   $\boxed{\text{Donc } z = 3\sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\dfrac{3\pi}{4})\right) = \left[3\sqrt{2}; -\dfrac{3\pi}{4}\right].}$