

Devoir maison n° 13
A rendre pour le samedi 12 mai 2018

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25^\circ\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100^\circ\text{C}$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C .

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a
 $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ , si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.

a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes?

