

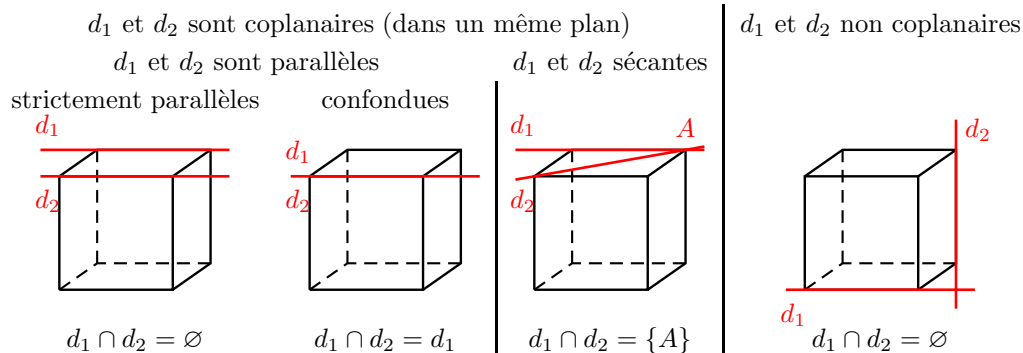
Chapitre 7 : Géométrie dans l'espace

I Positions relatives de droites et plans de l'espace

I.1 Positions relatives de deux droites

Propriété

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.



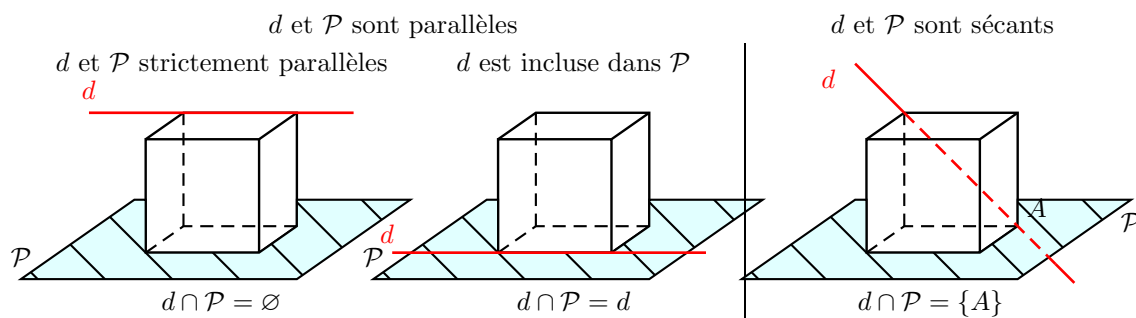
I.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Propriété

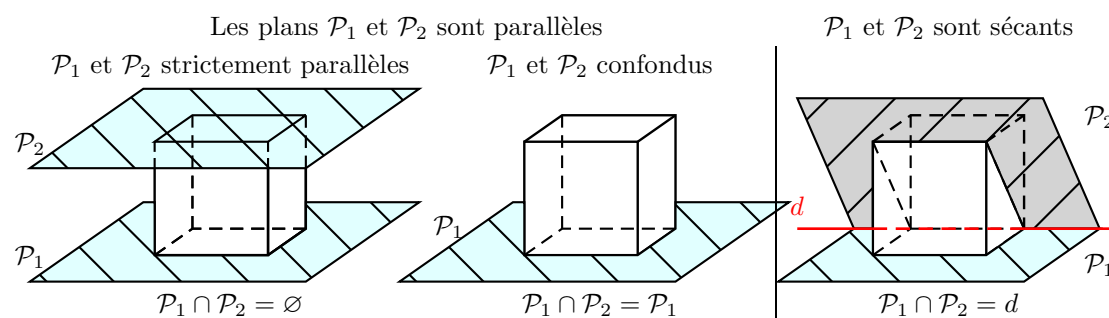
Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



I.3 Positions relatives de deux plans

Propriété

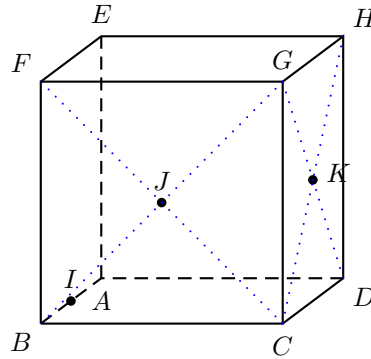
Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



Exercice 1

Soit un cube $ABCDEFGH$. On note J le centre de la face $(BCGF)$, K le centre de la face $(CDHG)$, et I le milieu de $[AB]$. Étudier les positions relatives des droites :

- (KJ) et (DB)
- (AE) et (IF)
- (AB) et (FC)

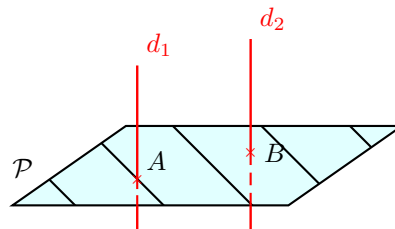


II Parallélisme dans l'espace

II.1 Parallélisme de droites

Propriété

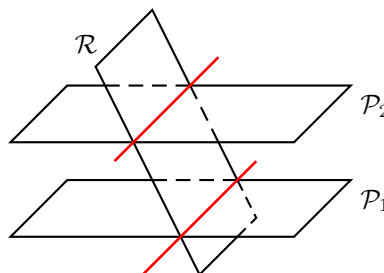
1. Si deux droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



II.2 Parallélisme de plans

Propriété (admise)

1. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles.
Si $\mathcal{R}$ est un plan sécant avec $\mathcal{P}_1$, alors
 - $\mathcal{R}$ est aussi sécant avec $\mathcal{P}_2$,
 - et les droites d'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.



II.3 Parallélisme d'une droite et d'un plan

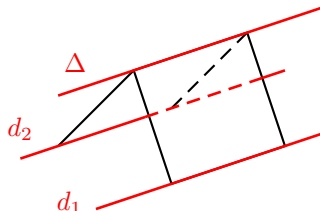
Théorème (théorème du toit)

Si

- les droites d_1 et d_2 sont parallèles,
- d_1 est contenue dans $\mathcal{P}_1$, d_2 est contenue dans $\mathcal{P}_2$,
- les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ ,

alors,

la droite Δ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est parallèle à d_1 et à d_2 .



Conséquence

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à la droite d'intersection des deux plans.

Démonstration

Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ .

d_1 est une droite de P_1 et d_2 est une droite de P_2 . Les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

On veut montrer que Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d_1 et d_2 .

On raisonne par l'absurde.

Supposons que Δ et d_1 ne soient pas parallèles.

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P_1 .

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs du plan P_1 .

De même, Δ et d_2 ne sont pas parallèles.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi deux vecteurs directeurs du plan P_2 .

Comme les plans P_1 et P_2 ont des vecteurs directeurs communs, ils sont parallèles, ce qui est contradiction avec les données.

Donc Δ et d_1 sont parallèles.

Δ est parallèle à d_1 et à d_2 . □

III Orthogonalité dans l'espace

III.1 Droites orthogonales

Définition

On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles respectives menées par un même point sont perpendiculaires.

Remarque

Deux droites perpendiculaires sont à la fois orthogonales et sécantes.

Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

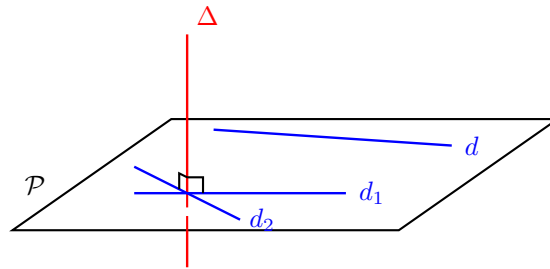
III.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Définition

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Théorème

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



Démonstration (à connaître)

On montre l'équivalence suivante :

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de plan.

La démonstration utilise le produit scalaire.

1. Implication directe :

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et Δ une droite orthogonale à d_1 et à d_2 .

Considérons des vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ de d_1 , $\vec{u}_2$ de d_2 et $\vec{v}$ de Δ .

Comme $\Delta \perp d_1$, on a $\vec{v} \perp \vec{u}_1$, et donc $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0$.

De même, $\Delta \perp d_2$, d'où $\vec{v} \perp \vec{u}_2$, et donc $\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Comme d_1 et d_2 sont sécantes dans $\mathcal{P}$, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Autrement dit $(u_1; u_2)$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de vecteurs directeurs).

Soit d une droite quelconque de $\mathcal{P}$, montrons que $\Delta \perp d$.

Considérons $\vec{w}$ un vecteur directeur de d (donc $\vec{w} \neq \vec{0}$).

Comme $\vec{w}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires, $\vec{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$:

$$\text{Il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \vec{w} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2.$$

Alors, par linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{v} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \\ &= a\vec{v} \cdot \vec{u}_1 + b\vec{v} \cdot \vec{u}_2 \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Comme les droites Δ et d ont des vecteurs directeurs orthogonaux, elles sont orthogonales.

$\Delta \perp d$.

2. Réciproque :

Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

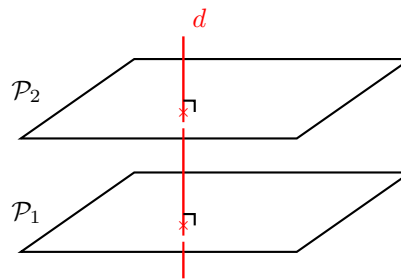
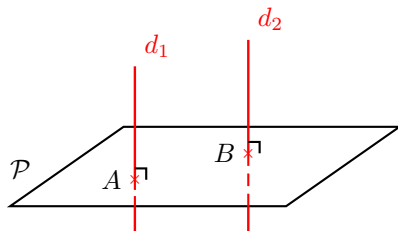
Cette réciproque est évidente. □

Remarque

Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut montrer que l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Propriété

1. Il existe une unique droite passant par un point A donné et perpendiculaire à un plan donné.
2. Il existe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.
3. Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.
4. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
5. Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

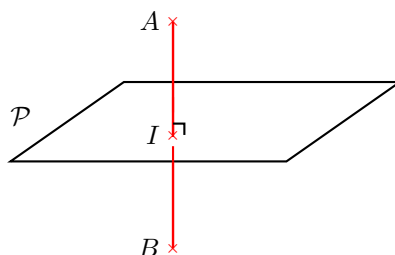


III.3 Plan médiateur de deux points

Définition

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB) .



Propriété

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B .

Remarque

C'est l'extension à l'espace de la médiatrice d'un segment dans le plan.

III.4 Orthogonalité de deux plans.

L'orthogonalité entre deux plans n'est pas au programme de Terminale S.

Définition

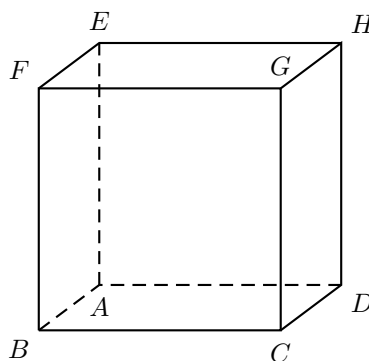
Deux plans sont orthogonaux si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Exemple :

Dans le cube ci-contre, la droite (CG) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$.

Tout plan contenant la droite (CG) est un plan orthogonal au plan $(ABCD)$.

En particulier, les plans $(HGCD)$ et $(ABCD)$ sont orthogonaux (mais aussi $(EGCA)$ et $(ABCD)$).



IV Vecteurs, droites et plans de l'espace

IV.1 Droites

Définition (Rappel)

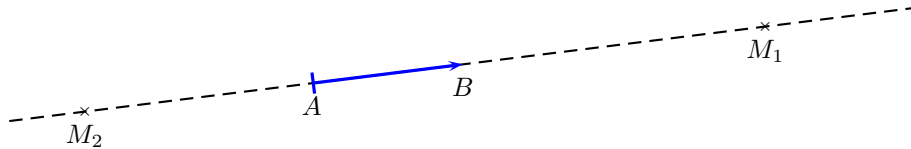
1. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
2. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ($A \neq B$ et $C \neq D$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Conséquence (Caractérisation d'une droite)

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$$



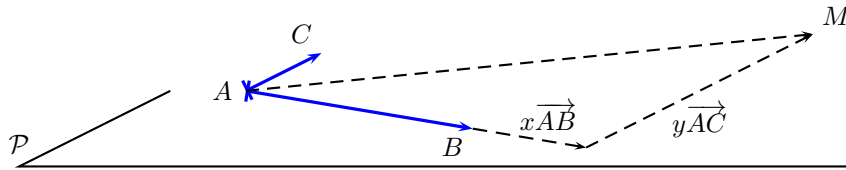
IV.2 Plans

Définition

Soient A , B et C trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe des réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$



Remarque

Pour définir un plan, il suffit de donner :

- trois points non alignés A , B et C ,
 - ou un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
- On dit alors que $(\vec{u}; \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

Définition

Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants, de même origine A , ont leurs extrémités dans un même plan passant par A .

Remarque

1. Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
2. Reformulation pour trois vecteurs :
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points A , B , C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan).

Propriété

1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si

il existe un triplet de réels $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

2. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet de réels (a, b, c) tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Propriété (Méthode utile en exercice)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Remarque

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Remarque

Quelques évidences :

Deux points sont toujours alignés.

Trois points, deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Trois vecteurs, dont deux sont colinéaires, sont toujours coplanaires.

Propriété

1. Une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est contenu dans $\mathcal{P}$.
2. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan $\mathcal{P}'$.