

Chapitre 5 : Généralités sur les suites.

Notion de limite

I Généralités

Définition

Une suite numérique (on dit aussi une suite réelle) est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Notation : $(u_n) \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $n \longmapsto u_n$.

Le nombre réel u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n) .

Remarque (importante)

Il y a notamment deux façons de définir une suite réelle :

Par son terme général : il y a une formule qui donne u_n en fonction de n :

$$u_n = f(n).$$

Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Alors, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ etc.

Par récurrence : il y a une formule qui permet de passer d'un terme de la suite au terme suivant. Autrement dit, on a relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il suffit de donner alors la valeur du premier terme pour que la suite soit entièrement définie.

Exemple : On donne $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = u_n - 2$.

Alors, $u_1 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$, $u_2 = 1 - 2 = -1$, $u_3 = -3$, $u_4 = -5$ etc.

Dans tous les cas, la suite peut être définie seulement à partir d'un certain rang n_0 . Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n - \pi}$ est définie pour $n \geq 4$.

I.1 Calcul de termes à la calculatrice

Pour une suite définie par son terme général, on peut utiliser le mode fonction et la table ajusté sur des entiers. Le mode suite est surtout intéressant pour les suites définies par récurrence.

Calculatrice TI.

On passe en mode, suite.

Pour définir la suite, on va dans $f(x)$.

$nMin$ est l'indice du premier terme : 0 si le premier terme est u_0 .

$u(n)$: expression qui peut dépendre de n , et/ou du terme précédent $u(n - 1)$.

$u(nMin)$ est le premier terme (on ne met rien pour une suite définie par son terme général).

On affiche le tableau de valeurs dans $table$ (éventuellement à paramétrer via $deftable$)

II Comportement global d'une suite

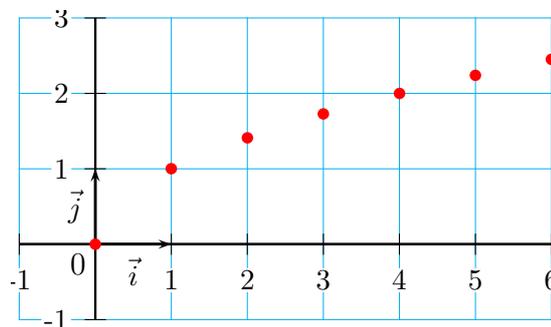
II.1 Suite croissante, suite décroissante

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- la suite (u_n) est croissante lorsque pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$,
- (u_n) est décroissante lorsque pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$,
- (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Exemple : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est croissante.



Techniques d'étude

- Si l'on connaît le terme général de la suite : $u_n = f(n)$, alors (u_n) a le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$,
- On peut former la différence $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à (u_n) croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ équivaut à (u_n) décroissante.
- Dans le cas des suites à termes strictement positifs, on peut former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 (utile lorsqu'il y a des puissances).
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est croissante.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 1

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^3 - 9n^2$
2. (U_n) est définie par $U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = U_n - n^2$
3. $v_n = \frac{1}{3^n}$ (définie pour tout $n \geq 0$).

Remarque

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes (même à partir d'un certain rang).

Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

En effet, si n est pair $u_n = 1$, et si n est impair $u_n = -1$.

Il n'existe donc aucun rang N_0 pour lequel on ait $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq N_0$.

De même, il n'existe aucun rang N_0 pour lequel on ait $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$.

II.2 Suite majorée, suite minorée

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leq M$ (le nombre M est un majorant de la suite).

On dit qu'une suite (u_n) est minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout entier n on ait $u_n \geq m$ (m est un minorant de la suite).

Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Remarque

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 2

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4n-1}{n+3}$ est croissante et majorée par 4.

En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III Représentation des suites définies par récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Cadre : on s'intéresse aux suites (u_n) définies par récurrence : $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

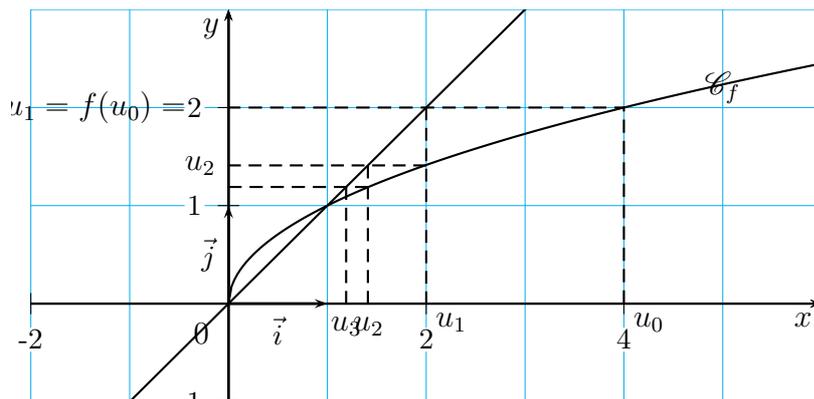
III.0.a Premier exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Donc, $f(x) = \sqrt{x}$. On représente la fonction f et on trace la droite d'équation $y = x$.

On place les termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

La droite d'équation $y = x$ permet de reporter une même valeur de l'axe des ordonnées vers l'axe des abscisses.

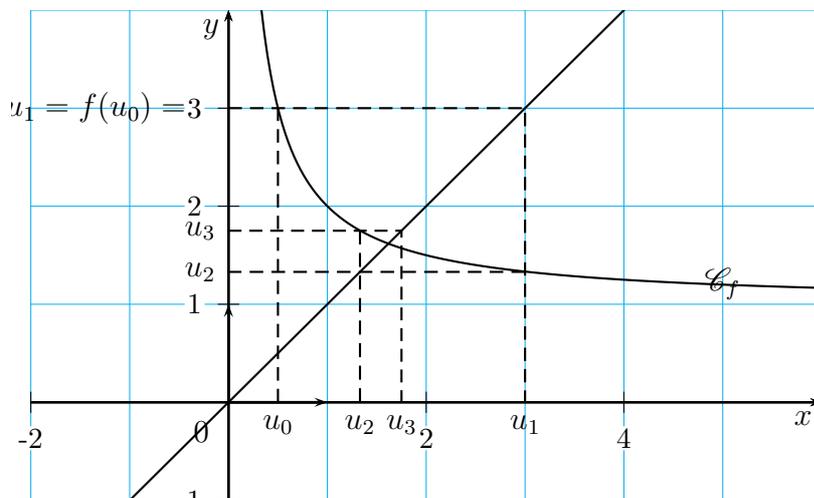


On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante, bornée ($1 \leq u_n \leq 4$), et qu'elle converge vers 1.

III.0.b Deuxième exemple :

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases} .$$

Ici, $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.



On peut conjecturer que la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

On retiendra deux allures classiques :

- la forme en escalier lorsque f est croissante sur $[0; +\infty[$,
- la forme en spirale lorsque f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

IV Notion de limite. Recherche de seuil

IV.1 Suite convergent vers un nombre réel ℓ

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.

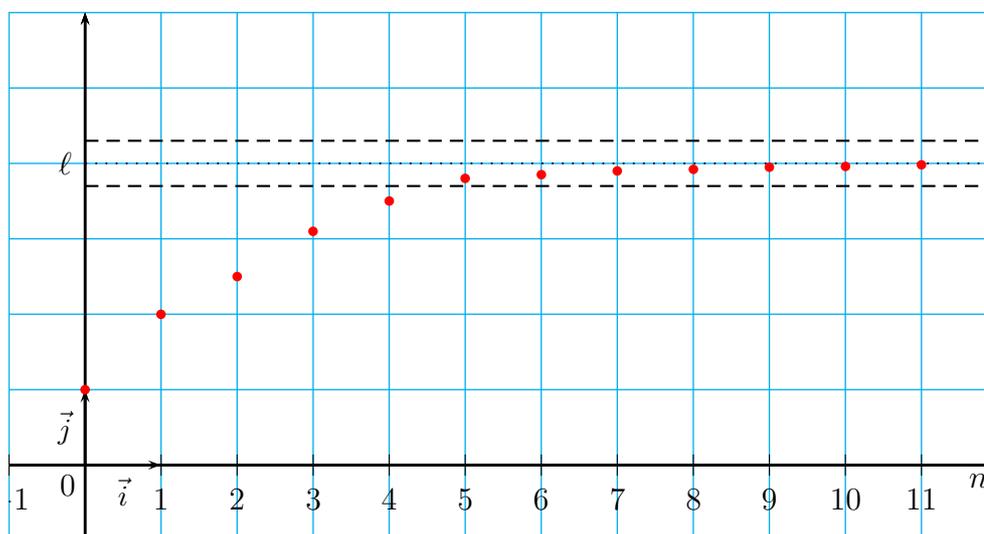
On dit que (u_n) admet pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit il) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim u_n = \ell$.

Illustration :

Le graphique ci-dessous représente une suite (u_n) qui converge vers $\ell = 4$.

L'intervalle ouvert contenant 4 est ici $]3, 7; 4, 3[$.



Remarque

Il est inutile de préciser $n \rightarrow +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.

On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Théorème

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Remarque

Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).

Exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ n'ont pas de limite. Elles sont divergentes.

Exemple :

$\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ où k est un entier supérieur ou égal à 1 sont des suites convergentes vers 0.

IV.2 Suites ayant une limite infinie

Définition

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim u_n = +\infty$.

On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si tout intervalle du type $] -\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim u_n = -\infty$.

Exemple :

Avec la suite de terme général $u_n = n^2$, $\lim u_n = +\infty$.

$\lim \sqrt{n} = +\infty$.

Recherche de seuil lorsque l'on conjecture que la suite diverge vers $+\infty$:

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.

Il est clair que (u_n) est croissante (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$).

On cherche le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, $n^2 \geq 10^7$.

— Méthode 1 : on résout l'inéquation $n^2 \geq 10^7$

Comme n est un entier positif, cela implique $n \geq \sqrt{10^7} \approx 3162,3$.

Le plus petit entier qui convient est donc $N = 3163$.

Parfois, on sera confronté à des inéquations qu'on ne sait pas résoudre, et il faudra se tourner vers la méthode 2.

— Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme.

DÉBUT

```
| n prend la valeur 0
| U prend la valeur n^2
| Tant que U < 10^7,
|   | n prend la valeur n + 1
|   | U prend la valeur n^2
| Fin Tant que Afficher n
```

FIN

Exercice 3

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times \sqrt{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.

Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^4$ (voir livre page 115).

3. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0 ¹.

1. On doit trouver $n_0 = 465$