Correction de l'interrogation n° 7
Sujet 1

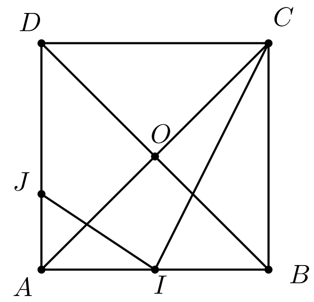
Exercice 1
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $BC = 3$.
   Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.}$
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 6$.
   Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
   Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le milieu de $[AB]$.
   D'après la formule du projeté,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} \\ &= 6 \times \frac{6}{2} \\ &= 18\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18.}$
3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$ et $C(4;0)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= xx' + yy' \\ &= 3 \times 9 - 3 \times (-2) \\ &= 33\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33.}$
4. $AB = AC = 2$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= 2 \times 2 \times \cos(-\frac{\pi}{3}) \\ &= 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2.}$

Exercice 2
Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$.

Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1.
   - $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -AD \times AD = -1$ (puisque D est le projeté orthogonal de C sur (AD)).
   - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -AB \times AI = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.
     On a utilisé le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OD}$ sur (AB) qui est $\overrightarrow{IA}$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}$.
   - $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}$.
     Or $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
     De plus, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,
     donc $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}BC^2 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.
     Donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}$.

2. (a) Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 0)$ et J a pour coordonnées $(0; \frac{1}{3})$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   C a pour coordonnées $(1;1)$, donc $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC} = xx' + yy' = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

(b) On a $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IC} = IJ \times IC\cos(\widehat{JIC})$.

Or $IJ = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$.

Et $IC = \sqrt{\dfrac{1}{4}+1} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

On en déduit que $\dfrac{1}{12} = \dfrac{\sqrt{13}}{6} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos(\widehat{JIC})$,

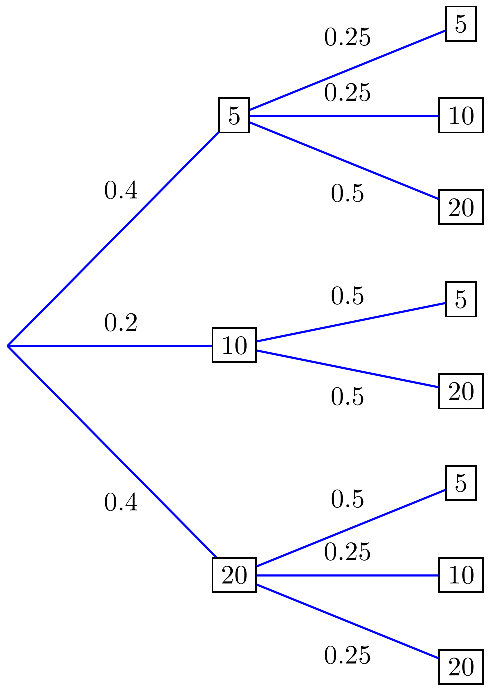
donc $\cos(\widehat{JIC}) = \dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{65}} = \dfrac{\sqrt{65}}{65}$.

Enfin, à la calculatrice, $\widehat{JIC} \approx 83$ degrés.

Exercice 3

Dans un sac, on met 2 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 2 billets de 20 €.
Pour avoir le droit de jouer, il faut payer 25 €.
On tire successivement et sans remise deux billets du sac.
À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.



2. Soit X la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ).
Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
$10-25=-15$, $15-25=-10$, $25-25=0$, $30-25=5$, $40-25=15$.
$\boxed{X \text{ est à valeurs dans } \{-15; -10; 0; 5; 15\}.}$

3. Déterminer la loi de probabilité de X.
$P(X=-15) = 0.4\times 0.25 = 0.1$.
$P(X=-10) = 0.4\times 0.25 + 0.2\times 0.5 = 0.2$.
$P(X=0) = 0.4\times 0.5 + 0.4\times 0.5 = 0.4$.
$P(X=5) = 0.2\times 0.5 + 0.4\times 0.25 = 0.2$.
$P(X=15) = 0.4\times 0.25 = 0.1$.
D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-15	-10	0	5	15
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

4. Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il intéressant (d'un point de vue financier) ?

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum x_i \times p_i\\ &= -15\times 0.1 - 10\times 0.2 + 0\times 0.4 + 5\times 0.2 + 15\times 0.1\\ &= -1.5 - 2 + 0 + 1 + 1.5\\ &= -1\end{aligned}$$

L'espérance de gain est de -1 €.
Comme $E(X) < 0$, le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

Exercice 4

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
$1+5+50=56$. Il y a 56 billets gagnants.
Il y a donc $N-56$ billets non gagnants.

(b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
$5000-5=4995$, $1000-5=995$, et $50-5=45$.
Les valeurs possibles de X sont donc 4995 ; 995 ; 45 ; -5.

(c) Déterminer, en fonction de N, la loi de probabilité de X.
On a vu qu'il y a $N-56$ billets perdants.
Il y a équiprobabilité.
$P(X=4995) = \dfrac{1}{N}$. $\quad P(X=995) = \dfrac{5}{N}$.
$P(X=45) = \dfrac{50}{N}$. $\quad P(X=-5) = \dfrac{N-56}{N}$.
La loi de X se résume donc par le tableau suivant :

x_i	4995	995	45	-5
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{N}$	$\dfrac{5}{N}$	$\dfrac{50}{N}$	$\dfrac{N-56}{N}$

2. Justifier que l'espérance de X est donnée par $E(X)=\dfrac{12500}{N}-5$.
   $E(X)=\sum x_i \times p_i$.
   $E(X) = \dfrac{4995\times 1+995\times 5+45\times 50-5\times(N-56)}{N} = \dfrac{12500-5N}{N}=\dfrac{12500}{N}-5$
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.
   (a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
   Le bénéfice de l'organisateur s'exprime par sa recette moins les coûts qui correspondent aux lots gagnants.
   On a donc $5\times N-(5000+5\times 1000+50\times 50)=2000$
   D'où $5N=2000+12500$, puis $5N=14500$, et $N=2900$.
   La loterie compte 2900 billets.
   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   $E(X)=\dfrac{12500}{2900}-5=\dfrac{-20}{29}\approx -0,69$.
   (c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».
   $P(A)=P(X\geqslant 45)=1-P(X=-5)=1-\dfrac{2900-56}{2900}=\dfrac{56}{2900}=\dfrac{14}{725}\approx 0,019$.
   Le joueur a environ 1,9% de chance de tomber sur un billet gagnant.

Exercice 5 (bonus, 1 point)
Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3;-3)$, $B(-4;4)$, et $C(5;1)$. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
$H\in(BC)$ et $(AH)\perp(BC)$.
Notons $H(x;y)$. $\overrightarrow{BC}(9;-3)$; $\overrightarrow{BH}(x+4;y-4)$; $\overrightarrow{AH}(x+3;y+3)$.
Comme $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, $-3(x+4)-9(y-4)=0$, donc $-3x-9y+24=0$, soit $x+3y-8=0$.
Comme $(AH)\perp(BC)$, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, soit $9(x+3)+(-3)(y+3)=0$, soit $9x-3y+18=0$, ou $3x-y+6=0$.
On résout le système $\begin{cases} x+3y-8=0 \\ 3x-y+6=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3y+8 \\ 3(-3y+8)-y+6=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.
$\boxed{\text{Donc } H(-1;3).}$

Réponses du sujet 2

Exercice 6 (4 points)

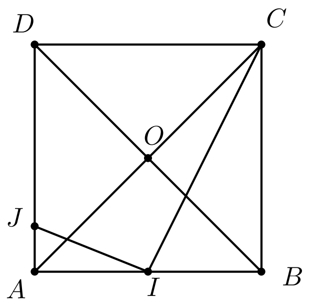
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $AC = 5$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 10$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 50$.
3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $A(-5; 2)$, $B(-2; -1)$, $C(4; 0)$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33$.
4. $AB = AC = 6$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{2\pi}{3}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -18$.

Exercice 7 (4 points)

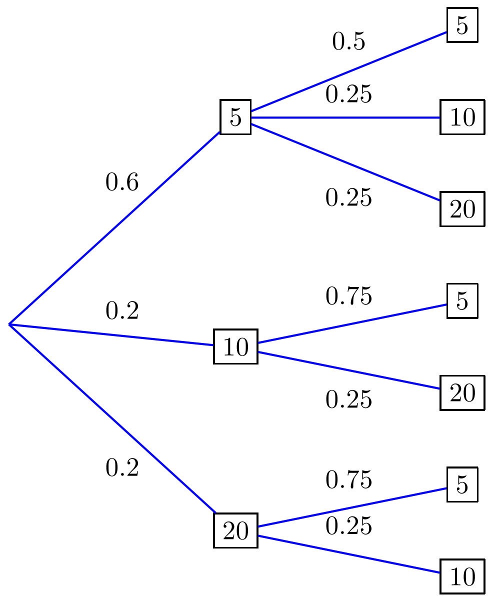
Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$. Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = -1$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OD} = 0,5$ $\quad$ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,2$
2. On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.
   (a) On a $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\boxed{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC} = -\dfrac{1}{20} = -0,05.}$
   (b) Déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{JIC})$ et la mesure de $\widehat{JIC}$ à un degré près.
   $\boxed{\cos(\widehat{JIC}) = -\dfrac{1}{\sqrt{145}} = -\dfrac{\sqrt{145}}{145},\ \widehat{JIC} \approx 95 \text{ degrés}}$

Exercice 8

1. Le sac contient trois billets de 5, un billet de 10, et un billet de 20.



2. $10 - 21 = -11$, $15 - 21 = -6$, $25 - 21 = 4$, $30 - 21 = 9$.
   Les valeurs possibles de X sont -11, -6, 4 et 9.
3. Loi de X :
   Par exemple pour $P(X = -6)$,
   $P(X = -6) = P(5; 10) + P(10; 5) = 0,6 \times 0,25 + 0,2 \times 0,75 = 0,3$.
   etc...

x_i	-11	-6	4	9
p_i	0.3	0.3	0.3	0.1

4. Espérance de X.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i = \ldots = -3 < 0$.
   Comme $E(X) < 0$, le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

Exercice 9

Voir sujet 1

Exercice 10

Voir sujet 1