1G. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

Deux entiers naturels ont pour différence 7 et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Quels sont-ils ?

Soient x et y de tels nombres, x étant le plus grand.
On a $x - y = 7$, et $xy - (x + y) = 43$.
On a alors $y = x - 7$, et en remplaçant dans la 2^e^ équation :

$$\begin{aligned} x(x-7) - (x + x - 7) &= 43 \\ x^2 - 7x - 2x + 7 &= 43 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 + 4 \times 36 = 225 = 15^2 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 - 15}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 + 15}{2} = 12$

On exclut $x = -3$ car on cherche des entiers naturels.
Il reste $x = 12$, alors $y = x - 7 = 12 - 7 = 5$.
Vérifions que 12 et 5 répondent au problème :
$12 - 5 = 7$ et $12 \times 5 - (12 + 5) = 60 - 17 = 43$.

Les nombres cherchés sont 12 et 5.

Exercice 2

Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$.

1. On considère l'affirmation suivante : « Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$. »
   (a) L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   VRAI : Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, alors f n'a pas de racine, et donc $\Delta < 0$.
   (b) Énoncer la réciproque de l'implication précédente.
   « Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$. »
   (c) Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   FAUX : considérons le trinôme $f(x) = x^2 + 7$.
   $\Delta = -28 < 0$, et pourtant $f(x)$ n'est pas toujours strictement négatif puisque $f(0) = 7 > 0$.
2. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.
   « Si $a + b + c = 0$, alors 1 est racine de f. »
   VRAI : On a $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   $f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c$.
   Donc $f(1) = 0$ équivaut à $a + b + c = 0$.

Exercice 3

1. On suppose que la ficelle a pour longueur 85 cm. On note x la longueur de l'un des deux côtés du triangle formé à l'aide de la ficelle, l'autre côté a alors pour longueur $85 - x$.
   Ces deux côtés forment un angle droit si et seulement si :
   $$\begin{aligned} x^2 + (85 - x)^2 &= 65^2 \\ x^2 + 7225 - 170x + x^2 &= 4225 \\ 2x^2 - 170x + 3000 &= 0 \end{aligned}$$
   On obtient une équation du second degré.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 170^2 - 8 \times 3000 = 49000 = 70^2$.
   L'équation a donc deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{170 - 70}{4} = 25$
   et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{170 + 70}{4} = 60$.

   Il est donc possible de former un triangle rectangle dans le cas où la ficelle a pour mesure 85 cm. Un des côté adjacent à l'angle droit mesure 25 cm et l'autre mesure 60 cm.
2. On fournit un contre-exemple.
   Pour une longueur de 100, on arrive, en raisonnant comme à la question 1, à l'équation $x^2 + (100 - x)^2 = 65^2$, soit $2x^2 - 200x + 5775 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots = -6200 < 0$.

   Cette équation n'a pas de solution, on ne peut pas former un triangle rectangle si la longueur de la ficelle est 100.

Étude générale :

Notons l la longueur de la ficelle, et x la longueur de l'un des deux côtés du triangle formés à l'aide de la ficelle, l'autre côté a alors pour longueur $l - x$.
Ces deux côtés forment un angle droit si et seulement si :

$$x^2 + (l - x)^2 = 65^2$$
$$x^2 + l^2 - 2lx + x^2 = 65^2$$
$$2x^2 - 2lx + l^2 - 65^2 = 0$$

On obtient une équation du second degré.
$\Delta = 4l^2 - 8(l^2 - 65^2) = -4l^2 + 8 \times 65^2$.
L'équation a donc deux solutions ou une si et seulement si :

$$-4l^2 + 8 \times 65^2 \geqslant 0$$
$$-4l^2 \geqslant -8 \times 65^2$$
$$l^2 \leqslant 2 \times 65^2$$

l étant un nombre positif, on peut former un triangle rectangle avec la ficelle si et seulement si sa longueur est plus petite ou égale à $65\sqrt{2} \approx 91,92$ cm. Dans le cas contraire, on ne peut pas former de triangle rectangle avec la ficelle.