2de. Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

1. $x + 4 \geqslant -2(x + 3)$.

$$\begin{aligned} x+4 &\geqslant -2(x+3) \\ x+4 &\geqslant -2x-6 \\ x+2x &\geqslant -6-4 \\ 3x &\geqslant -10 \\ x &\geqslant -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left[-\frac{10}{3}\ ;\ +\infty\right[.}$$

2. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{5x+1}{6} \geqslant x + 4$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{5x+1}{6} &\geqslant x+4 \\ \frac{6x}{3} - \frac{6(5x+1)}{6} &\geqslant 6(x+4) \\ 2x-(5x+1) &\geqslant 6x+24 \\ 2x-5x-1 &\geqslant 6x+24 \\ -3x-6x &\geqslant 24+1 \\ -9x &\geqslant 25 \\ x &\leqslant -\frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -\frac{25}{9}\right].}$$

3. $(x+3)^2 < 25x^2$.
Indication : montrer que cette équation équivaut à $(6x+3)(-4x+3) < 0$.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &< 25x^2 \\ (x+3)^2-(5x)^2 &< 0 \\ (x+3+5x)(x+3-5x) &< 0 \\ (6x+3)(-4x+3) &< 0 \end{aligned}$$

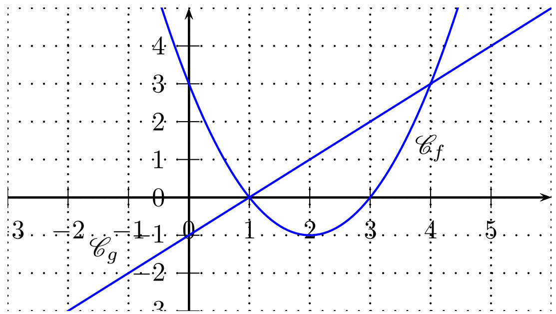
Valeurs clés :
$6x + 3 = 0$ donne $6x = -3$, d'où $x = -\dfrac{1}{2}$.
$-4x + 3 = 0$ donne $-4x = -3$, d'où $x = \dfrac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$3/4$		$+\infty$
$6x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(6x+3)(-4x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[.}$$

Exercice 2

Soient $f(x) = (x-2)^2 - 1$ et $g(x) = x - 1$.



1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$. Expliquer la méthode en une phrase.
Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points où la courbe de f est au-dessus de la courbe de g (comme l'inégalité est stricte, on exclut les abscisses des points d'intersection des 2 courbes).
$\boxed{\text{Graphiquement, } S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[.}$

2. Montrer que $f(x) - g(x) = (x-1)(x-4)$.

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x-2)^2-1-(x-1) \\ &= (x-2)^2-x \\ &= x^2-4x+4-x \\ &= x^2-5x+4 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(x-1)(x-4) &= x^2-4x-x+4\\ &= x^2-5x+4\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } f(x)-g(x)=(x-1)(x-4).}$

3. Retrouver le résultat de la question 1. par le calcul.
   On résout l'inéquation $f(x) > g(x)$ par le calcul. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}f(x) &> g(x)\\ f(x)-g(x) &> 0\\ (x-1)(x-4) &> 0\end{aligned}$$

Valeurs clés :
$x-1=0$ donne $x=1$.
$x-4=0$ donne $x=4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{On retrouve } S=]-\infty;1[\cup]4;+\infty[.}$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x+3}{x} < 2$

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x} &< 2\\ \frac{x+3}{x}-2 &< 0\\ \frac{x+3}{x}-\frac{2x}{x} &< 0\\ \frac{x+3-2x}{x} &< 0\\ \frac{-x+3}{x} &< 0\end{aligned}$$

Valeurs clés :
$-x+3=0$ lorsque $x=3$.
$x=0$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+3}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\boxed{S=]-\infty;0[\cup]3;+\infty[.}$

2. $\dfrac{3x}{x+1} > 3$

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x+1} &> 3\\ \frac{3x}{x+1}-3 &> 0\\ \frac{3x}{x+1}-\frac{3x+3}{x+1} &> 0\\ \frac{3x-(3x+3)}{x+1} &> 0\\ \frac{-3}{x+1} &> 0\end{aligned}$$

La fonction constante égale à -3 est toujours strictement négative.
$x+1=0$ lorsque $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-3}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S=]-\infty;-1[.}$