BTS – Limites de fonctions

I Limites de référence et opérations

Propriété (limite en a d'une fonction continue)
Toutes les fonctions rencontrées cette année sont continues ce qui signifie que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 1) = 5$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$

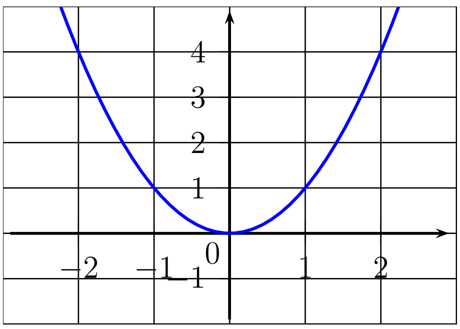
Propriété (limite en $\pm\infty$ de x^n)
Soit n un entier naturel non nul.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
2. Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$. Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

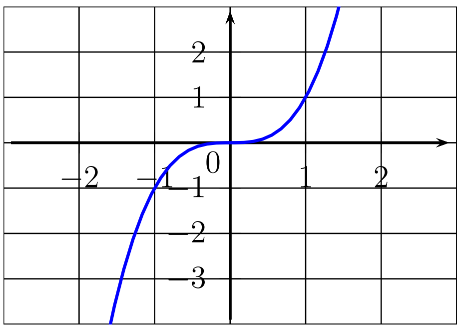
Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$f(x) = x^2$



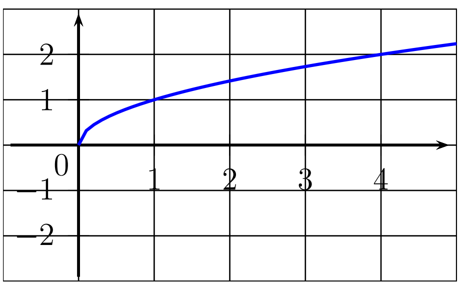
$f(x) = x^3$



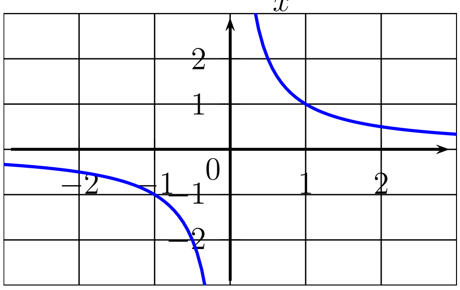
Propriété (limites de $\sqrt{x}$ et $\dfrac{1}{x}$)

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x}$



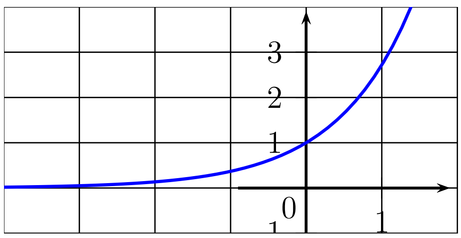
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



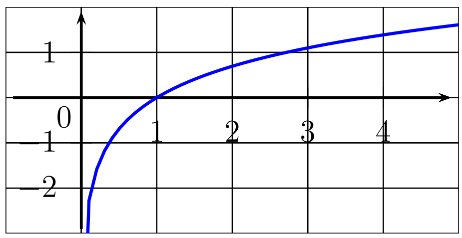
Propriété (limites de exp et ln ♡)

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

$f(x) = \mathrm{e}^x$



$f(x) = \ln(x)$



II Opérations sur les limites

f et g sont des fonctions qui admettent une limite en a, (a désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$). ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

II.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite en a						

Exercice 1

1. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} 2x + \ln(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} -11 + \mathrm{e}^x$

II.2 Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \times g(x)) =$									

Exercice 2

1. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} -3x^2\mathrm{e}^x$
2. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} x(3 + \mathrm{e}^x)$

II.3 Limite d'un quotient

II.3.a cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a							

II.3.b cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite en a	0^+	0^-	0^+	0^-	0
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a					

Remarque
La notation 0^+ signifie 0 en restant positif.

Exercice 3

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\mathrm{e}^x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$

Remarque (récapitulatif des formes indéterminées)
Les 4 formes indéterminées sont donc : $+\infty - \infty$, $\pm\infty \times 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, et $\dfrac{0}{0}$. (éviter ces notations à l'écrit).
Dans tous les autres cas, on peut conclure directement avec les opérations.

II.4 Limite d'une composée

Théorème (limite d'une fonction composée)
a, b et c peuvent désigner un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g\left(u(x)\right) = c$.

Exercice 4

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x+1}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(\dfrac{1}{x})$

III Les formes indéterminées

Propriété (limites à l'infini des fonctions polynômes)
La limite en $-\infty$ ou $+\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
Elle est toujours égale à $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de ce terme.

Exemple :
Soit $f(x) = -11x^3 + 5x + 12$.
Son terme de plus haut degré est$-11x^3$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -11x^3 = +\infty$. Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -11x^3 = -\infty$.

Théorème (croissances comparées des fonctions e^x, x^n, et $\ln(x)$)
Soit n un entier naturel non nul.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$

Remarque

1. On peut retenir cette hiérarchie pour un produit ou un quotient :
$$\mathrm{e}^x >> x^n >> \ln(x)$$
où $>>$ signifie "l'emporte sur".
2. Pour lever une indétermination, il peut être utile de mettre en facteur le terme prépondérant.

Exercice 5
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - \ln(x)$.

IV Asymptotes

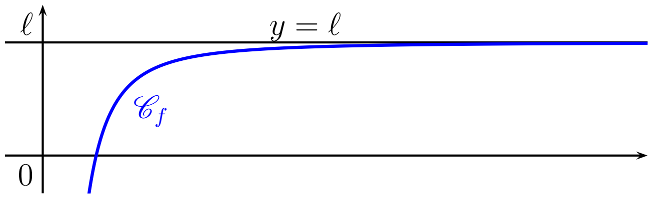
Une droite asymptote à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.

Propriété

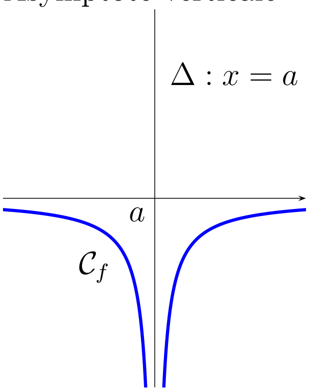
1. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, $(\ell \in \mathbb{R})$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $(a \in \mathbb{R})$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en a.
3. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.

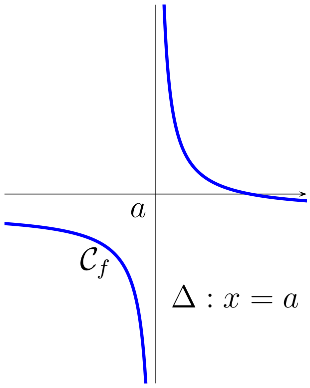
Remarque (illustrations)

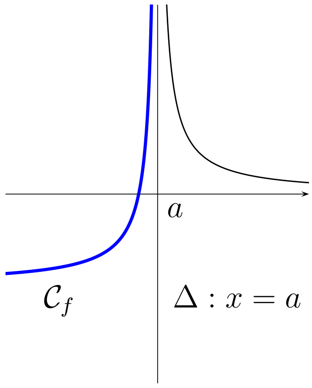
1. Asymptote horizontale



2. Asymptote verticale







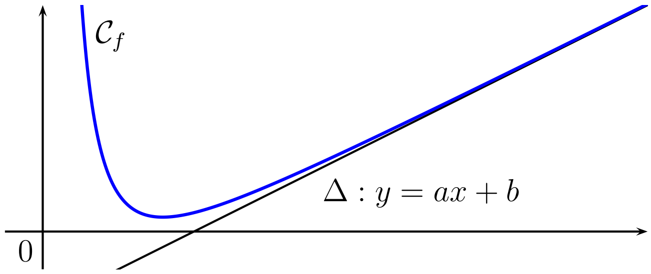
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

3. asymptote oblique



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

— On montre que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.
  Donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe.

— On montre aussi que On montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$.
  La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.