Contrôle de mathématiques n° 1
Correction du sujet 1

Exercice 1 (4 points)
Compléter le tableau

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$3 < x \leqslant 8$	$]3;8]$
$-7 \leqslant x \leqslant 1$	$[-7;1]$
$x > -1$	$]-1;+\infty[$
$x \geqslant -2$	$[-2;+\infty[$
$-1 \leqslant x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 5$	$[-1;3] \cup [5;+\infty[$
$x < 0$ ou $x > 4$	$]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$

Exercice 2 (1 point)
On considère les intervalles $I = [6;10]$ et $J =]-\infty;7[$.
Donner $I \cap J$ et $I \cup J$. $\boxed{I \cap J = [6;7[, \text{ et } I \cup J =]-\infty;10].}$

Exercice 3 (4 points)
En détaillant soigneusement les calculs, mettre les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

1. $a = 2 - 3 \times \dfrac{11}{4} = 2 - \dfrac{33}{4} = \dfrac{8}{4} - \dfrac{33}{4} = -\dfrac{25}{4}$.
2. $b = \dfrac{12}{35} \div \dfrac{60}{21} = \dfrac{12}{35} \times \dfrac{21}{60} = \dfrac{6 \times 2 \times 3 \times 7}{7 \times 5 \times 6 \times 2 \times 5} = \dfrac{3}{25}$.
3. $c = -2 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{3} + 1 = -2 \times \dfrac{25}{9} + \dfrac{15}{9} + \dfrac{9}{9} = -\dfrac{26}{9}$.
4. $d = \left(6 - \dfrac{4}{5}\right) \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{30-4}{5} \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{26}{5} \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{13 \times 2 \times 5 \times 5}{5 \times 13} = 10$.

Exercice 4 (3 points)

1. Le nombre $(5 - \sqrt{13}) \times (5 + \sqrt{13})$ est-il un entier relatif ? Justifier.
   $a = (5 - \sqrt{13}) \times (5 + \sqrt{13}) = 5^2 - 13 = 25 - 13 = 12 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{Donc } a \in \mathbb{Z}.}$
2. Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier appartenant à l'intervalle $[-3;-1]$. $\boxed{\text{Le nombre } -2,13 \text{ convient.}}$
3. Donner un exemple de nombre rationnel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{5}\right[$.
   $\dfrac{3}{2} = 1,5$, et $\dfrac{9}{5} = 1,8$. Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel.
   $\boxed{\text{Le nombre 1,7 convient.}}$

Exercice 5 (1 point)
Donner un encadrement décimal de $\sqrt{11}$ d'amplitude 10^{-4}.
À la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,790$. $\boxed{3,316\,6 < \sqrt{11} < 3,316\,7.}$

Exercice 6 (5 points)
On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

Entrer a
b prend la valeur $2 \times a$
c prend la valeur $b + 3$
d prend la valeur $c \times c$
e prend la valeur $4 \times a \times a$
f prend la valeur $d - e$
Afficher f

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-4	-1	1	16	-15

$\boxed{\text{On obtient } -15.}$

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	2	5	25	4	21

. $\boxed{\text{On obtient } 21.}$

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $\boxed{f(x) = (2x+3)^3 - 4x^2}$
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?
   On cherche x tel que $f(x) = 7$.
   En développant, $f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 = 12x + 9$.
   D'où $12x + 9 = 7$, et $x = -\dfrac{1}{6}$. $\boxed{\text{Il faut entrer } a = -\dfrac{1}{6} \text{ pour obtenir } f = 7.}$

Exercice 7 (3 points)
Pour chaque équation ou inéquation, traduire à l'aide d'une distance, puis donner les solutions. On pourra s'aider d'une représentation sur la droite graduée (facultatif).
On rappelle que la distance entre deux réels a et b est $d(a;b) = |a - b|$.

1. $|x - 11| = 3$. $\boxed{d(x;11) = 3. \text{ Les solutions sont 8 et 14.}}$
2. $|x + 8| < 1$. $\boxed{d(x;-8) < 1. \text{ L'ensemble solution est l'intervalle }]-9;-7[.}$
3. $|x - 5| \geqslant 9$. $\boxed{d(x;5) \geqslant 9. \text{ L'ensemble solution est }]-\infty;-4] \cup [14;+\infty[.}$

Exercice 8 (bonus, 1 point)
Déterminer les réels x tels que $|x + 6| < |x - 2|$.
$d(x;-6) < d(x;2)$, on cherche donc les nombres qui sont plus proches de -6 que de 2.
$\boxed{S =]-\infty;-2[.}$

Contrôle n° 1. Correction du sujet 2

Exercice 9 (4 points)
Compléter le tableau suivant.

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$3 \leqslant x \leqslant 4$	$[3;4]$
$-3 < x < 1$	$]-3;1[$
$x \leqslant 1$	$]-\infty;1]$
$x > -9$	$]-9;+\infty[$
$-3 < x < 0$ ou $x \geqslant 11$	$]-3;0[\cup [11;+\infty[$
$x \leqslant 5$ ou $x \geqslant 8$	$]-\infty;5] \cup [8;+\infty[$

Exercice 10 (1 point)
On considère les intervalles $I = [2;13]$ et $J = [7;+\infty[$.
Donner $I \cap J$ et $I \cup J$. $\boxed{I \cap J = [7;13], \text{ et } I \cup J = [2;+\infty[.}$

Exercice 11 (4 points)
En détaillant soigneusement les calculs, mettre les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

1. $a = 6 - 2 \times \frac{11}{3} = \frac{18}{3} - \frac{22}{3} = -\frac{4}{3}$.
2. $b = \frac{22}{45} \div \frac{55}{36} = \frac{22}{45} \times \frac{36}{55} = \frac{2 \times 11 \times 9 \times 4}{9 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{8}{25}$.
3. $c = -2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} + 1 = -2 \times \frac{49}{16} + \frac{7}{4} + 1 = -\frac{49}{8} + \frac{14}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{27}{8}$.
4. $d = \left(8 + \frac{4}{5}\right) \times \frac{25}{13} = \frac{40+4}{5} \times \frac{25}{13} = \frac{44}{5} \times \frac{25}{13} = \frac{44 \times 5 \times 5}{5 \times 13} = \frac{220}{13}$.

Exercice 12 (3 points)
1. Le nombre $(6 - \sqrt{11}) \times (6 + \sqrt{11})$ est-il un entier relatif ? Justifier.
   $a = (6 - \sqrt{11}) \times (6 + \sqrt{11}) = 6^2 - 11 = 36 - 11 = 25 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{Donc } a \in \mathbb{Z}.}$
2. Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier appartenant à l'intervalle $[-5;-3]$. $\boxed{\text{Le nombre } -4,2 \text{ convient.}}$
3. Donner un exemple de nombre rationnel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{7}{2};\frac{19}{5}\right[$.
   $\frac{7}{2} = 3,5$, et $\frac{19}{5} = 3,8$. Tout nombre décimal est rationnel.
   $\boxed{\text{Le nombre 3,6 convient.}}$

Exercice 13 (1 point)
Donner un encadrement décimal de $\sqrt{13}$ d'amplitude 10^{-4}.
À la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3,605\,551\,275$. $\boxed{3,605\,5 < \sqrt{11} < 3,605\,6.}$

Exercice 14 (5 points)
On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

Entrer a
b prend la valeur $5 \times a$
c prend la valeur $b - 1$
d prend la valeur $c \times c$
e prend la valeur $25 \times a \times a$
f prend la valeur $d - e$
Afficher f

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-10	-11	121	100	21

$\boxed{\text{Il renvoie 21.}}$

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	5	4	16	25	-9

$\boxed{\text{Il renvoie } -9.}$

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $\boxed{f(x) = (5x-1)^2 - 25x^2 = -10x + 1.}$
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?
   $\boxed{f(x) = 7 \text{ ssi } x = -\frac{3}{5}.}$

Exercice 15 (3 points)
Pour chaque équation ou inéquation, traduire à l'aide d'une distance, puis donner les solutions. On pourra s'aider d'une représentation sur la droite graduée (facultatif).
On rappelle que la distance entre deux réels a et b est $d(a;b) = |a - b|$.

1. $|x - 1| = 7$. $\boxed{d(x;1) = 7. \text{ Les solutions sont } -6 \text{ et } 8.}$
2. $|x + 4| \leqslant 3$. $\boxed{d(x;-4) \leqslant 3. \text{ L'ensemble solution est l'intervalle } [-7;-1].}$
3. $|x - 5| > 2$. $\boxed{d(x;5) > 2. \text{ L'ensemble solution est }]-\infty;3[\cup]7;+\infty[.}$

Exercice 16 (bonus, 1 point)
Déterminer les réels x tels que $|x + 6| < |x - 2|$.
$d(x;-6) < d(x;2)$, on cherche donc les nombres qui sont plus proches de -6 que de 2.
$\boxed{S =]-\infty;-2[.}$