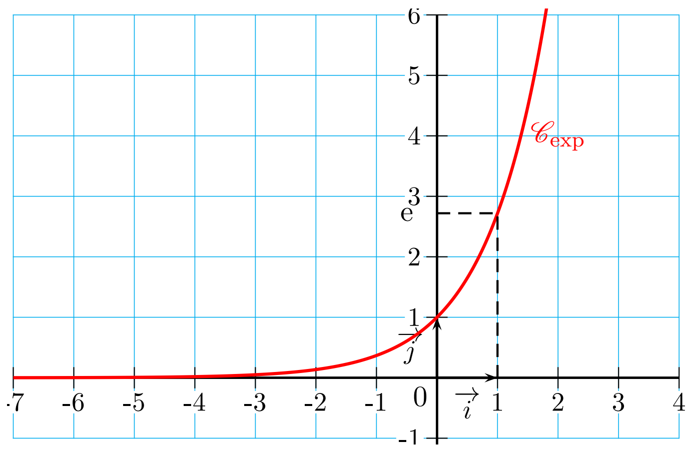
Chapitre 15 : Logarithmes

I La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le corollaire du théorème des théorème des valeurs intermédiaires,
pour tout $k > 0$, il existe un unique réel a tel que $\mathrm{e}^a = k$.
Ceci permet de définir une nouvelle fonction, la fonction logarithme népérien.

I.1 Définition

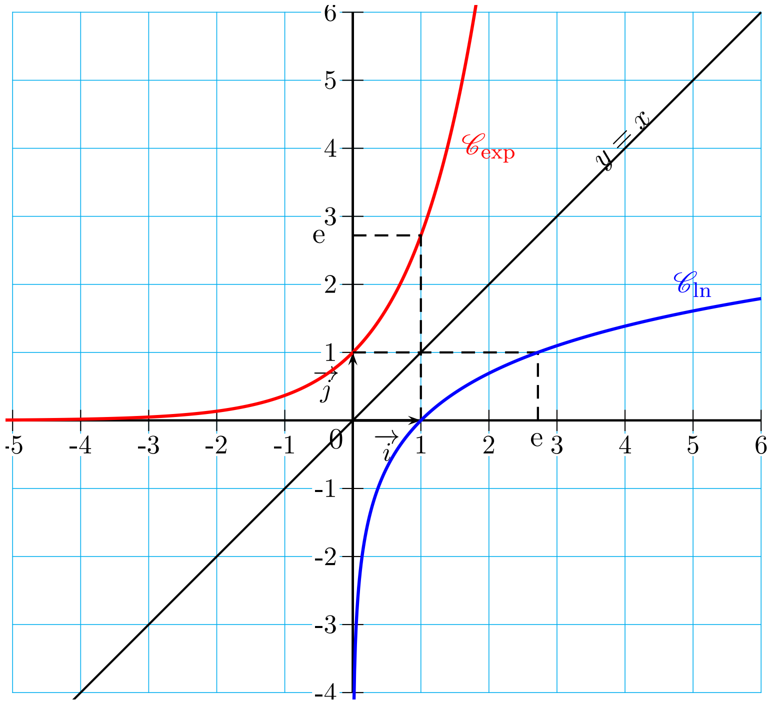
Définition
La fonction logarithme népérien, notée ln est définie sur $]0;+\infty[$ de la façon suivante :
pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue a $\mathrm{e}^a = k$.
Autre formulation :
pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique antécédent de k par la fonction exponentielle.

Exemple :
Comme $\exp(0) = 1$, alors $\ln(1) = 0$.
Comme $\exp(1) = \mathrm{e}$, alors $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Propriété
Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^y$$

Remarque
On dit que ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



I.2 Propriétés

Propriété

1. La fonction ln est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
3. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$.
5. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$,
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
6. La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
   (a) $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.
   (b) $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.
7. Pour tous a et b strictement positifs,
   (a) $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
   (b) $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Démonstration

1. On admet la continuité de ln sur $]0; +\infty[$.
2. La propriété se déduit directement de la définition.
3. $\ln 1 = 0$ car $\mathrm{e}^0 = 1$, et $\ln \mathrm{e} = 1$ car $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

4. Soient $a>0$ et $x>0$, avec $x \neq a$. On forme le taux d'accroissement de ln entre a et x, et on cherche sa limite lorsque x tend vers a.

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\ln x - \ln a}{x-a} \\ &= \frac{\ln x - \ln a}{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}}{\ln x - \ln a}} \end{aligned}$$

Comme ln est continue, $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$.
Posons $X = \ln x$, Par définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en $\ln a$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}}{\ln x - \ln a} &= \lim_{X \to \ln a} \frac{\mathrm{e}^{X} - \mathrm{e}^{\ln a}}{X - \ln a} \\ &= \exp'(\ln a) \\ &= \mathrm{e}^{\ln a} \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} r(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x-a} = \dfrac{1}{a}$. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

5. Pour tout $x>0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
   Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
6. Soit $x > 0$.
   Comme ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $x<1$ implique $\ln x < \ln 1 = 0$, et de même $x>1$ implique que $\ln x > 0$.
   Réciproquement, si $\ln(x) < 0$, alors $0 < x < 1$ ($x>0$ car sinon $\ln x$ n'est pas défini).
   En effet, si on avait $x \geqslant 1$, on obtiendrait $\ln x \leqslant 0$, en contradiction avec $\ln x < 0$.
   De même, on montre par l'absurde que $\ln x > 0$ implique $x > 1$.
7. Ces équivalences découlent de la stricte croissance de ln sur $]0;+\infty[$.

I.3 Relation fonctionnelle

Théorème (Règles de calcul)
Pour tous a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif n :

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$,
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$,
4. $\ln(a^n) = n\ \ln a$,
5. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Démonstration

1. $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = a \times b$, et $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = a \times b$.
   Donc $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$, soit $\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

2. Soit $a > 0$.
   Comme $a \times \dfrac{1}{a} = 1$,

$$\begin{aligned} \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) &= \ln a + \ln \frac{1}{a} \\ \ln(1) &= \ln a + \ln \frac{1}{a} \\ 0 &= \ln a + \ln \frac{1}{a} \end{aligned}$$

   Donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.

3.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln a + \ln \frac{1}{b} \\ &= \ln a - \ln b \end{aligned}$$

4. ***(a) Cas des entiers positifs.***
   On raisonne par récurrence.
   On va montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
   Notons $P(n)$ la propriété $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
   Initialisation
   Pour $n = 0, \ln(a^0) = \ln 1 = 0$, et $0 \times lna = 0$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité
   Soit $k \geqslant 0$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{aligned} \ln(a^{k+1}) &= \ln(a^k \times a) \\ &= \ln(a^k) + \ln a \\ &= k \times \ln a + \ln a \\ &= (k+1)\ln a \end{aligned}$$

   Donc $P(k+1)$ est vraie.
   La propriété est héréditaire.
   Conclusion
   Par récurrence, on a montré que pour tout $n \geqslant 0$ $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
   (b) Cas des entiers négatifs.
   Soit $n < 0$, alors $-n > 0$.
   $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ avec $-n > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(a^n) &= \ln \frac{1}{a^{-n}} \\ &= -\ln(a^{-n}) \\ &= -(-n)\ln a \\ &= n \ln a \end{aligned}$$

5. On a $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln a$.
   Donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

I.4 Limites liées à la fonction logarithme népérien

Propriété

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Le tableau de variation de ln est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration

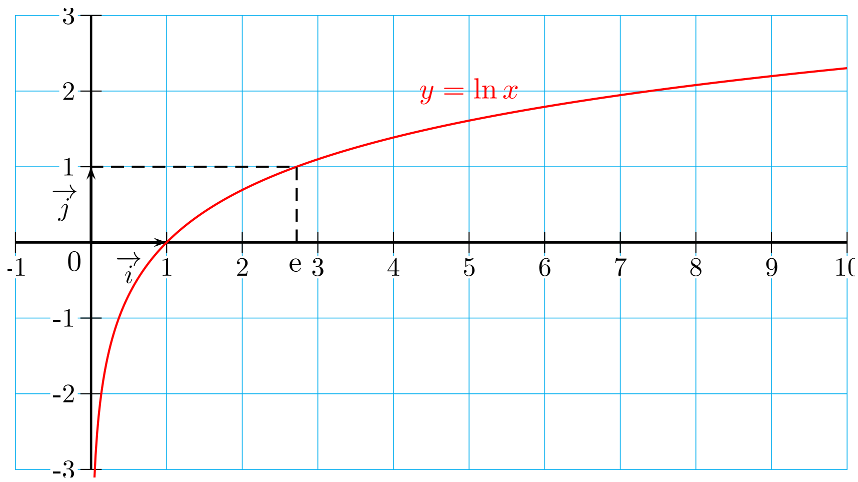
1. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
   Soit $A > 0$.
   On doit montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $\ln x > A$.
   Or, $\ln x > A$ revient à $\mathrm{e}^{\ln x} > \mathrm{e}^{A}$, soit $x > \mathrm{e}^{A}$.
   Donc $a = \mathrm{e}^{A}$ convient.
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

   Pour tout $x > 0$, $\ln x = -1 \times (-\ln x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et on vient de montrer que $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

   Donc par composée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

   Comme, pour tout $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, les opérations sur les limites donnent le résultat : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.



Remarque
Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\ln}$.

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Démonstration

1. On remarque que $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+h$ car $\ln 1 = 0$.
   Donc $\dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$.
   La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   En particulier, ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
   Par définition du nombre dérivé, on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. Pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{x} &= \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}} \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x}\right)} \end{aligned}$$
   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$.
   Par composition des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$.
   En passant à l'inverse, il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 1
Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
Indication : se ramener à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

II Logarithme d'une fonction

Dans ce paragraphe, u est une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur I, c'est-à-dire que u est à valeurs dans $]0; +\infty[$:

$$\text{pour tout } x \in I,\ u(x) > 0.$$

On étudie la fonction $\ln(u)$, notée $\ln u$.
La fonction $\ln u$ est alors bien définie sur I.

$$\ln u : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(u(x)) \end{cases}$$

Exemple :
Prenons $u(x) = 2x - 6$.
On s'intéresse donc à la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$.
Déterminons son domaine de définition.
Pour que $f(x)$ existe, il faut que $u(x) = 2x - 6 > 0$.
$2x - 6 = 0$ donne $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$ est définie sur $]3; +\infty[$.

Théorème (Dérivée de $\ln u$)
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Conséquence
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors u et $\ln u$ ont même sens de variation sur I.

Sur l'exemple précédent, $f(x) = \ln(2x - 6)$ et $u(x) = 2x - 6$, comme u est croissante sur $]3; +\infty[$, alors f est également croissante sur $]3; +\infty[$.

Remarque (Cas particulier)
Soit u une fonction affine d'expression $u(x) = ax + b$ prenant des valeurs strictement positives sur I.
Alors, la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax + b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b}$$

Exemple : $f(x) = \ln(-2x + 3)$.
$-2x + 3 > 0$ si $x \in]-\infty; 1,5[$.
Pour tout $x < 1,5$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-2}{-2x + 3}$.

Remarque
Bilan des formules de dérivées qui utilisent le théorème de dérivation d'une fonction composée : Rappel :

Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
2. Si $u > 0$ sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
4. La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u u'$.
5. Si $u > 0$ sur I, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
6. Soient v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et a et b des réels.
   Si $f(x) = v(ax+b)$, alors $f'(x) = av'(ax+b)$.

III Fonction logarithme décimal

Définition
On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque
Pour tout entier n, $\log 10^n = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

Propriété

1. $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
2. La fonction log des dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.
3. La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier n,
   (a) $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$,
   (b) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
   (c) $\log(a^n) = n \log(a)$

IV Exercices de logarithmes sur Euler

— Appliquer les propriétés de calcul sur les logarithmes :
ressource 1241
ressource 1243
ressource 1245
ressource 269
ressource 267
ressource 1235

— Équations avec des logarithmes :
ressource 1717
ressource 272
ressource 271

— Inéquations avec des logarithmes :
ressource 2915
ressource 2917
ressource 2882