1G. Correction de l'Épreuve Blanche de Mathématiques

Automatismes - QCM (6 points)

Q1 : Le nombre $(3+\sqrt{5})^2$ est égal à : **Réponse correcte : A.** $14+6\sqrt{5}$

— **Correction** : Développement de $(3+\sqrt{5})^2 = 9+6\sqrt{5}+5 = 14+6\sqrt{5}$.

Q2 : Dans une famille, la proportion de violonistes est : **Réponse correcte : A.** $\frac{1}{12}$

— **Correction** : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Q3 : $P(A \cup B)$ avec A et B indépendants : **Réponse correcte : C. 0,6**

— **Correction** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,6$.

Q4 : $P(E)$ avec l'arbre pondéré : **Réponse correct : A.** $P(E) = 0,31$

— **Correction** : $P(E) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 = 0,31$.

Q5 : Affirmation fausse sur l'arbre : **Réponse correcte : D.** $P_B(A) = 0,8$

— **Correction** : $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,4\times 0,8}{0,4\times 0,8+0,6\times 0,7} = \frac{32}{74} \neq 0,8$.

Q6 : Aire du trapèze : **Réponse correcte : A.** $\dfrac{7}{6}$

— **Correction** : $A = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2} \times 4 = \frac{7}{6}$.

Q7 : Augmentation du prix : **Réponse correcte : B. 20%**

— **Correction** : $\frac{36-30}{30} = 0,2 = 20\%$.

Q8 : Évolution globale : **Réponse correcte : C. une baisse de 16%**

— **Correction** : coefficient multiplicateur global $1,4 \times 0,6 = 0,84$, soit une baisse de 16%.

Q9 : Coefficient directeur : **Réponse correcte : D.** $\dfrac{5}{3}$

— **Correction** : $\frac{1-(-4)}{2-(-1)} = \dfrac{5}{3}$.

Q10 : Abscisse du point d'ordonnée 0 : **Réponse correcte : D.** $\dfrac{5}{4}$

— **Correction** : $0 = 2x - 2,5$ ssi $x = \frac{5}{4}$.

Q11 : Solution de l'inéquation $9 - x^2 < 0$: **Réponse correcte : C.** $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

— **Correction** : $x^2 > 9 \Rightarrow |x| > 3$.

Q12 : Formule de l'IMC : **Réponse correcte : A.** $t = \sqrt{\frac{m}{I}}$

— **Correction** : $I = \dfrac{m}{t^2}$ ssi $t^2 \times I = m$ ssi $t^2 = \dfrac{m}{I}$, donc $t = \sqrt{\dfrac{m}{I}}$ $(t > 0)$.

Exercice 1 (7 points)

Partie A

1) Déterminer les racines de $P(x) = -x^2 + 4$.

— **Correction** : $P(x) = 0$ ssi $x^2 = 4$ ssi $(x = 2$ ou $x = -2)$ $S = \{-2; 2\}$

2) Établir le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.

— **Correction** : Le trinôme $-x^2 + 4$ prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

1) Donner $f'(-2)$ et $f'(2)$.

— **Correction** : $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0$ car les tangentes en -2 et en 2 sont parallèles à l'axe des abscisses

2) Résoudre graphiquement $f'(x) \geq 0$.

— **Correction** : On lit les intervalles sur lesquels f est croissante. $S = [-2; 2]$.

3) Calculer $f'(x)$ et vérifier la relation donnée.

— **Correction** : $f'(x) = \dfrac{50(x^2+4) - 50 \times 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{50(-x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{50 \times P(x)}{(x^2+4)^2}$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

— **Correction** : Sur $\mathbb{R}$, $(x^2+4)^2 > 0$, et 50>0. Donc f' a le même signe que $P(x) = -x^2+4$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-12,5$	$\nearrow$	$12,5$	$\searrow$	

$f(2) = \dfrac{50 \times 2}{2^2+4} = \dfrac{100}{8} = \dfrac{25}{2} = 12,5$

$f(-2) = \dfrac{50 \times (-2)}{(-2)^2+4} = \dfrac{-100}{8} = \dfrac{-25}{2} = -12,5$

Partie C

1) Déterminer le moment où la concentration en sérotonine atteint son maximum.

— **Correction** : À $x = 2$ heures.

2) Valeur maximale de la concentration.

— **Correction** : $f(2) = 12,5$ ng/ml.

3) Instants où la concentration est égale à 10 ng/ml.

— **Correction** : On résout $f(x) = 10$, soit $\dfrac{50x}{x^2+4} = 10$ ssi $50x = 10x^2 + 40$ ssi $10x^2 - 50x + 40 = 0$ ssi $x^2 - 5x + 4 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 9 = 3^2 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{2} = 1$. $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{2} = 4$.
La concentration est égale à 10 ng/ml au bout d'une heure et aussi au bout de 4 heures après l'administration. C'est cohérent avec le graphique.
Remarque : on pouvait éviter de calculer le discriminant car 1 est racine évidente de $x^2 - 5x + 4$.

Exercice 2 (7 points)

Partie A

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

— **Correction** : $u_{n+1} = u_n + 0,25 \times u_n = 1,25u_n$.

2) Nature de la suite (u_n).

— **Correction** : Suite géométrique de raison $1,25$ et $u_0 = 20$.

3) Exprimer u_n en fonction de n.

— **Correction** : $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 1,25^n$.

4) Consommation en 2026

— **Correction** : $u_2 = 20 \times 1,25^2 = 20 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{4 \times 5 \times 5 \times 5}{4 \times 4} = \dfrac{125}{4}$ TWh en 2026.

5) Année où la consommation aura au moins triplé.

— **Correction** : On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 3 \times u_0$, soit $1,25^n \geqslant 3$.
La suite $(1,25^n)$ est croissante (car 1,25>1).
D'après l'aide au calcul, $1,25^4 < 3$ et $1,25^5 > 3$.
L'entier cherché est $n = 5$. La consommation aura au moins triplé en 2029 (pour la première fois).

Partie B

1) Exprimer S_n en fonction de n.

— **Correction** : Il y a (n+1) termes .
$S_n = 1er \times \dfrac{1 - q^{nb\ termes}}{1-q} = 20 \times \dfrac{1 - 1,25^{n+1}}{1 - 1,25} = -4 \times 20(1 - 1,25^{n+1}) = 80 \times (1,25^{n+1} - 1)$.

2) Calculer S_5 et interpréter.

— **Correction** : $S_5 = 80 \times (1,25^6 - 1) \approx 80(3,8-1) \approx 2,8 \times 80 \approx 224$.
La consommation totale sur la période 2024-2029 est d'environ 224 TWh.

3) Calculer la quantité totale de CO_2 émise entre 2024 et 2029.

— **Correction** : $224 \times 0,5 = 112$. On l'estime à 112 millions de tonnes de CO_2 sur cette période.