

1G. Interrogation n° 10
Corrigé - Sujet 1

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (6x + 1)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$.

Dérivée d'un produit de fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^x + (6x + 1)e^x = e^x(6x + 7)$.

2. Déterminer le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Comme $e^x > 0$ sur \mathbb{R} , $f'(x)$ a le même signe que $6x + 7$.

$6x + 7 > 0$ ssi $x > -\frac{7}{6}$.

$f(-\frac{7}{6}) = (6 \times \frac{-7}{6} + 1)e^{-7/6} = -6e^{-7/6}$

x	$-\infty$	$-7/6$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$-6e^{-7/6}$	

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{x - 5}{2e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = \frac{6 - x}{2e^x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc le dénominateur ne s'annule pas.

f est dérivable sur \mathbb{R} par quotient de fonctions dérivables.

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{1 \times (2e^x) - (x - 5) \times 2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{2e^x(1 - x + 5)}{(2e^x)^2} = \frac{6 - x}{2e^x}$.

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $[0; 10]$.

Comme $2 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $6 - x$.

$6 - x = 0$ ssi $x = 6$, et $6 - x$ est une expression de fonction affine avec

$a = -1 < 0$.

x	0	6	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{e^{-6}}{2}$	$\frac{5}{2}e^{-10}$

$f(0) = \frac{-5}{2e^0} = -\frac{5}{2}$ $f(6) = \frac{6 - 5}{2e^6} = \frac{1}{2e^6} = \frac{e^{-6}}{2}$ $f(10) = \frac{10 - 5}{2e^{10}} = \frac{5}{2}e^{-10}$

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0; 10]$.

D'après le tableau de variation, le minimum est $f(0) = -\frac{5}{2}$ (qui est négatif, alors que $f(10) = \frac{5}{2}e^{-10} > 0$) et le maximum est $f(6) = \frac{e^{-6}}{2}$.

Donc, pour tout $x \in [0; 10]$, $-\frac{5}{2} \leq f(x) \leq \frac{e^{-6}}{2}$.

Exercice 3 (4 points)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 12e^{-x}$.

La dérivée de f est $f'(x) = -12e^{-x}$.

2. Écrire sous la forme e^K où K est une expression de x .

$A(x) = \frac{e^3 \times (e^{-3x})^2}{e^{5x}}$

$A(x) = e^{3-6x-5x} = e^{3-11x}$.

3. Donner le tableau de signe sur \mathbb{R} de l'expression $B(x) = x^2e^x - 4e^x$.

On factorise : $B(x) = e^x(x^2 - 4) = e^x(x - 2)(x + 2)$. Le signe de $B(x)$ est celui de $(x - 2)(x + 2)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines qui sont -2 et 2 , et $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$B(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. Donner l'ensemble solution dans \mathbb{R} de l'équation $(e^x - e^2)(e^{-x} + 1) = 0$.

Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.

$e^x - e^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$,

et $e^{-x} + 1 = 0$ n'a pas de solution car $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $S = \{2\}$.

Exercice 4 (3 points)

Un écrivain publie un nouveau roman.

- Calculer le nombre d'exemplaires vendus en 2026.

En 2026, $n = 0$, donc $u_0 = 5e^{-0.2 \times 0} = 5$.

En 2026, il vend 5 milliers d'exemplaires.

- Montrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5e^{-0.2(n+1)} = 5e^{-0.2n} \times e^{-0.2} = u_n \times e^{-0.2}$.

Donc, (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0.2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.

- Calculer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_6$, puis l'arrondi à 10^{-3} .

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Ici, $n = 6$ et il y a 7 termes.

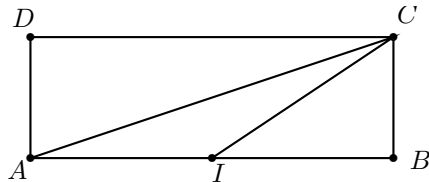
$S = 5 \times \frac{1 - (e^{-0.2})^7}{1 - e^{-0.2}} \approx 20,781$.

Sur la période 2026-2032 inclus, on vendra 20 781 exemplaires du roman.

Exercice 5 (6 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.

On note I le milieu de $[AB]$.



- Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$$

On raisonne par projeté orthogonal dans les deux cas.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = -BC^2 = -2^2 = -4$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CD} = -DC^2 = -6^2 = -36$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

- (a) Justifier que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = 22$.

Par relation de Chasles et linéarité,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \\ &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= 0 + CD \times BI + DA \times CB + 0 \\ &= 6 \times 3 + 2 \times 2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

On pouvait aussi introduire un repère orthonormé, comme $(A; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{2}\overrightarrow{AD})$.

- En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ACI})$ puis la mesure de l'angle \widehat{ACI} à un degré près.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et BCA , on calcule les longueurs CI et CA .

$$CI^2 = CB^2 + BI^2 = 2^2 + 3^2 = 13, \text{ donc } CI = \sqrt{13}.$$

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 = 2^2 + 6^2 = 40, \text{ donc } CA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

D'après la formule du cosinus,

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = CA \times CI \times \cos(\widehat{ACI}).$$

$$\text{Donc } 22 = \sqrt{13} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\widehat{ACI})$$

$$\cos(\widehat{ACI}) = \frac{22}{\sqrt{13} \times 2\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{130}}{130}.$$

Avec la calculatrice, $\widehat{ACI} \approx 15$ degrés.

Exercice 6 (bonus, 1 point)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3; -3)$, $B(-4; 4)$, et $C(5; 1)$. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

$H \in (BC)$ et $(AH) \perp (BC)$.

Notons $H(x; y)$.

$$\overrightarrow{BC}(9; -3); \overrightarrow{BH}(x+4; y-4); \overrightarrow{AH}(x+3; y+3).$$

Comme \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires, $(xy' - yx' = 0)$, soit $-3(x+4) - 9(y-4) = 0$, donc $-3x - 9y + 24 = 0$, soit $x + 3y - 8 = 0$.

Comme $(AH) \perp (BC)$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, soit $9(x+3) + (-3)(y+3) = 0$, soit $9x - 3y + 18 = 0$, ou $3x - y + 6 = 0$.

$$\text{On résout le système } \begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3y + 8 \\ 3(-3y + 8) - y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Donc $H(-1; 3)$.

Corrigé du sujet 2

Exercice 7 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = (-2x + 8)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$.

La dérivée d'un produit est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\text{Donc, } f'(x) = -2e^x + (-2x + 8)e^x = (-2x + 6)e^x.$$

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $[0; 10]$.

Le signe de $f'(x)$ est le même que $(-2x + 6)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 $-2x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 3$

x	0	3	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	8	$2e^3$	$-12e^{10}$

$$f(0) = (-2 \times 0 + 8)e^0 = 8 \times 1 = 8.$$

$$f(3) = (-2 \times 3 + 8)e^3 = 2e^3.$$

$$f(10) = (-2 \times 10 + 8)e^{10} = -12e^{10}.$$

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0; 10]$.

D'après le tableau de variation, le minimum est $f(10) = -12e^{10} < 0$ (alors que $8 > 0$) et le maximum est $f(3) = 2e^3$.

$$\text{Donc, } f(x) \in [-12e^{10}; 2e^3].$$

Exercice 8 (3 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x - 3}{e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = \frac{-4x + 7}{e^x}$.

La dérivée d'un quotient est donnée par $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\text{Donc, } f'(x) = \frac{4e^x - (4x - 3)e^x}{e^{2x}} = \frac{-4x + 7}{e^x}.$$

2. Déterminer le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

$f'(x)$ a le même que $(-4x + 7)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$-4x + 7 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$4e^{-7/4}$	

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7 - 3}{e^{7/4}} = 4e^{-7/4}$$

Exercice 9 (4 points)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 500e^{6x}$.

$$\text{La dérivée de } f \text{ est } f'(x) = 500 \times 6 \times e^{6x} = 3000e^{6x}.$$

2. Écrire sous la forme e^K où K est une expression de x .

$$A(x) = \frac{e^4 \times (e^{-2x})^2}{e^{8x}}$$

$$A(x) = e^{4-4x-8x} = e^{4-12x}.$$

3. Donner le tableau de signe sur \mathbb{R} de l'expression $B(x) = x^2e^x - 6xe^x$.

On factorise : $B(x) = e^x(x^2 - 6x) = e^xx(x - 6)$. $B(x)$ a la même signe que $x(x - 6)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$x(x - 6) = 0 \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } x = 6)$$

Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$	
$B(x)$	+	0	-	0	+

4. Donner l'ensemble solution dans \mathbb{R} de l'inéquation $e^{2x} < e^{-x}$.

$$e^{2x} < e^{-x} \Leftrightarrow 2x < -x \Leftrightarrow 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$$\text{Donc, } S =]-\infty; 0[.$$

Exercice 10 (3 points)

Un écrivain publie un nouveau roman. On admet que le nombre d'exemplaires vendus l'année $(2026+n)$, en milliers, est donné par $u_n = 7e^{-0,6n}$.

1. Calculer le nombre d'exemplaires vendus en 2026.

En 2026, $n = 0$, donc $u_0 = 7e^{-0,6 \times 0} = 7$ milliers d'exemplaires.

2. Montrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison et son premier terme.

$$u_{n+1} = 7e^{-0,6(n+1)} = 7e^{-0,6n} \times e^{-0,6} = u_n \times e^{-0,6}.$$

(u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0,6}$ et de premier terme $u_0 = 7$.

3. Calculer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_8$, puis l'arrondi à 10^{-3} .

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par $S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Ici, il y a 9 termes.

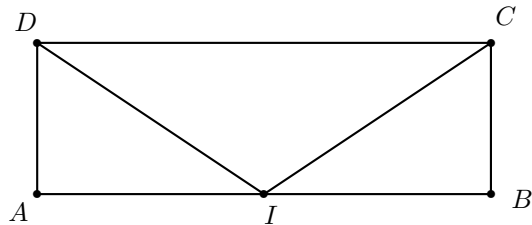
$$S = 7 \times \frac{1 - (e^{-0,6})^9}{1 - e^{-0,6}} \approx 15,445.$$

Sur la période 2026-2034, on vendra 15 445 exemplaires.

Exercice 11 (6 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :

(a) $\vec{DI} \cdot \vec{CB}$

Par projeté, $\vec{DI} \cdot \vec{CB} = \vec{CB} \cdot \vec{CB} = CB^2 = 2^2 = 4$

(b) $\vec{CD} \cdot \vec{IC}$

Par projeté, $\vec{CD} \cdot \vec{IC} = \vec{CD} \cdot \frac{-1}{2}\vec{CD} = -0,5 \times CD^2 = -18$

2. (a) Montrer que $\vec{ID} \cdot \vec{IC} = -5$. Justifier.

$$\vec{ID} \cdot \vec{IC} = (\vec{IA} + \vec{AD}) \cdot (\vec{IB} + \vec{BC}) = \vec{IA} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{BC} + \vec{AD} \cdot \vec{IB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = -IA^2 + 0 + 0 + AD^2 = -9 + 4 = -5.$$

- (b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{CID})$ puis la mesure de l'angle \widehat{CID} à un degré près.

En appliquant le théorème de Pythagore, on calcule IC et ID .

$$IC^2 = IB^2 + BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

De même, $ID^2 = 13$.

Donc $IC = ID = \sqrt{13}$. D'après la formule du cosinus,

$$\vec{IC} \cdot \vec{ID} = IC \times ID \times \cos(\widehat{CID})$$

$$\text{Donc } \cos(\widehat{CID}) = \frac{-5}{13}$$

Avec la calculatrice, $\widehat{CID} = \text{Arccos}\left(\frac{-5}{13}\right) \approx 112,6$.

L'angle \widehat{CID} mesure environ 113 degrés.

Exercice 12

Voir le sujet 1.