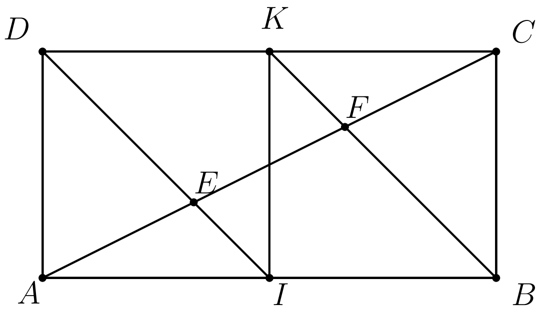
1re S. Correction du devoir maison n° 5

Exercice 1 (n° 104 page 153)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2AD$. I et K sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement.



1. Exprimer $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

En effet, comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. Soit E le point défini par $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

(b) En déduire que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

En effet, $ABCD$ est un rectangle donc un parallélogramme et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

(c) Que peut-on dire des points A, E, et C ?

Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{Donc les points } A, E \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

3. Soit F le symétrique de A par rapport à E.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Par définition du point F, E est le milieu de $[AF]$, et donc $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE}$.

$\boxed{\text{D'où } \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE} = 2\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.}$

(b) En déduire $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\boxed{\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.}$

4. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\boxed{\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.}$

5. Démonter que $F \in (BK)$.

On montre que B, K et F sont alignés en prouvant que $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

On a déjà $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

On va exprimer aussi $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

On remarque que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$.

$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{BF} \text{ et } \overrightarrow{BK} \text{ sont colinéaires, donc les points } B, K \text{ et } F \text{ sont alignés, } F \in (BK).}$

Exercice 2

On donne $A(-2;5)$, $B(-1;3)$, $C(4;1)$, $D(-2;-3)$. Pour tout m réel de l'intervalle $[-5;5]$, on note (d_m) la droite d'équation $mx - y + 4 = 0$.

1. Conjectures utilisant Geogebra.
   (a) Il semble que (d_m) passe par A pour $m = -0,5$.
   Il semble que (d_m) passe par B pour $m = 1$.
   (b) Il semble que (d_m) soit parallèle à (AB) pour $m = -2$.
   (c) Il semble que les droites (AB), (CD) et (d_m) soient concourantes pour $m = -5$ (elles semblent alors concourantes en $E(1; -1)$).
2. Démonstrations
   (a) $A(-2; 5) \in (d_m)$ ssi $m \times (-2) - 5 + 4 = 0$ ssi $m = -\dfrac{1}{2}$.
   (b) $B(-1; 3) \in (d_m)$ ssi $m \times (-1) - 3 + 4 = 0$ ssi $m = 1$.
   (c) (d_m) a pour équation réduite $y = mx + 4$.
   Son coefficient directeur est donc m.
   $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-5}{-1+2} = -2$.
   Le coefficient directeur de (AB) est -2.
   Les droites (d_m) et (AB) sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire lorsque $m = -2$.
   (d) Calculer la valeur de m pour que les droites (AB), (CD) et (d_m) soient concourantes.
   On détermine une équation de (AB) et une équation de (CD), puis leur point d'intersection.
   Enfin, on trouve la valeur de m pour que (d_m) passe par ce point d'intersection.
   Comme son coefficient directeur est -2, la droite (AB) a une équation réduite de la forme $y = -2x + p$.
   Avec les coordonnées de $A(-2; 5)$, il vient $5 = -2 \times (-2) + p$, donc $p = 1$.
   La droite (AB) a pour équation $y = -2x + 1$.
   Soit $M(x; y)$ un point du plan.
   $M(x; y) \in (CD)$ ssi $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires,
   ssi $-4(x-4) + 6(y-1) = 0$, ssi $-4x + 16 + 6y - 6 = 0$,
   soit $-2x + 3y + 5 = 0$.
   Une équation de (CD) est $-2x + 3y + 5 = 0$.
   On résout donc le système :
   $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ -2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ -2x + 3(-2x + 1) + 5 = 0 \end{cases}$,
   $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ -8x + 8 = 0 \end{cases}$, et donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
   Les droites (AB) et (CD) se coupent en $E(1; -1)$.
   (d_m) passe par E ssi $m \times 1 - (-1) + 4 = 0$, soit $m = -5$.
   Les droites (AB), (CD) et (d_m) sont concourantes ssi $m = -5$.
   (e) Il semble que toutes les droites (d_m) passent par le point $F(0; 4)$.
   Vérification par le calcul : pour tout $m \in \mathbb{R}$, $m \times 0 - 4 + 4 = 0$.
   Donc quel que soit le réel m la droite (d_m) passe par le point $F(0; 4)$.