Chapitre 11 : Produit scalaire dans le plan

I Définition

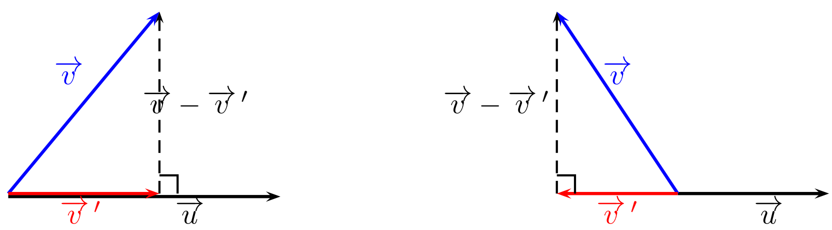
Définition (vecteurs colinéaires)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.

Remarque
Le produit $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ est parfois noté $\overrightarrow{u}^{\,2}$. On a donc $\overrightarrow{u}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Définition (cas général)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls, et $\overrightarrow{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\,'$$

Lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.



Conséquence
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque.
Le projet orthogonal $\overrightarrow{v}\,'$ de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$ est donné par la relation

$$\overrightarrow{v}\,' = \frac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \, \overrightarrow{u}$$

Démonstration
Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, alors $\overrightarrow{v}\,'$ est le vecteur nul et le résultat est clair.
Sinon, $\overrightarrow{v}\,'$ est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{u}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}\,' = \lambda \overrightarrow{u}$.
Alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\,' = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda \|\overrightarrow{u}\|^2$.
On en déduit la valeur de λ : $\lambda = \dfrac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.
Donc $\overrightarrow{v}\,' = \dfrac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \, \overrightarrow{u}$. □

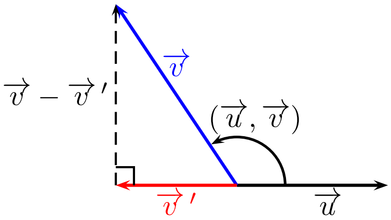
Exercice 1
Formule du projeté orthogonal
Représenter un vecteur connaissant son produit scalaire avec un vecteur donné : ressource 450

II Autres expressions du produit scalaire

II.1 La formule du cosinus

Théorème
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$



Remarque
Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on peut utiliser la mesure d'un angle géométrique à la place de celle de l'angle orienté correspondant dans la formule du cosinus.
Par exemple, soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.
alors $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4 \times \cos(-\frac{\pi}{6}) = 5 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.
Ou bien
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{6}) = 5 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Exercice 2
Appliquer la formule du cosinus : ressource 363

II.2 Expression en repère orthonormé

Théorème (Expression dans un repère orthonormé)
Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Corollaire (Lien entre distance et produit scalaire)

1. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. □

Exercice 3

1. Utiliser l'expression du produit scalaire en repère orthonormé : ressource 572
2. Déterminer le produit scalaire de 2 vecteurs représentés dans un quadrillage : ressource 451
3. Déterminer une coordonnée d'un vecteur orthogonal à un autre vecteur : ressource 361

II.3 Expression avec les normes

Théorème (Expressions à l'aide des normes)
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

III Propriétés du produit scalaire

Définition (Vecteurs orthogonaux)
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
Le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

Propriété
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Remarque
L'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ se traduit de façon analytique par :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0$$

Propriété
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs quelconques, et k un nombre réel.

1. Symétrie.
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
2. Linéarité (et même bilinéarité avec la symétrie).
   - $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
   - $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

Ces deux derniers points traduisent la bilinéarité du produit scalaire.
On notera l'analogie avec les règles de calcul sur le produit des nombres réels.

Propriété (Identités remarquables)
1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

Remarque
On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ pour s'en convaincre.