Chapitre 2 : Probabilité conditionnelle. Indépendance.

I Probabilité conditionnelle

Définition
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note parfois aussi $P(B/A)$.

Les probabilités conditionnelles vérifient les propriétés des probabilités. En particulier,

Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.
2. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
3. S'il y a équiprobabilité sur Ω, $P_A(B) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A} \cap \text{B}}{\text{nombre d'éléments de } A}$.

Remarque
Lorsqu'on calcule $P_A(B)$, l'ensemble de référence devient A.

Exemple :
Dans une classe de terminale de 32 élèves répartis en 18 filles et 14 garçons, il y a 20 élèves en spécialité LV2 Espagnol, dont 8 filles.
On choisit la fiche d'un élève au hasard, chaque fiche a autant de chance d'être choisie. On note :
A : « L'élève est une fille ».
B : « L'élève suit la spécialité LV2 Espagnol ».

1. Calculer $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.

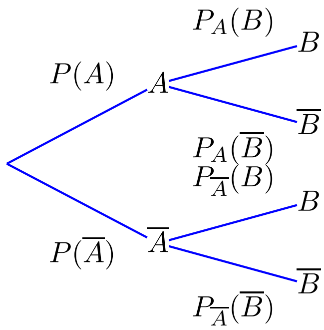
Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
Alors, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

II Arbre de probabilité

Certaines situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles peuvent être représentées par des arbres pondérés.
On place les événements aux bouts des branches, et les probabilités sur les branches. Un chemin est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

Exemple :

1$^{\text{er}}$ niveau	2$^{\text{ème}}$ niveau	Événement (chemin)	Probabilité



$A\cap B$	$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
$A\cap\overline{B}$	$P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})$
$\overline{A}\cap B$	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$
$\overline{A}\cap\overline{B}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

Propriété

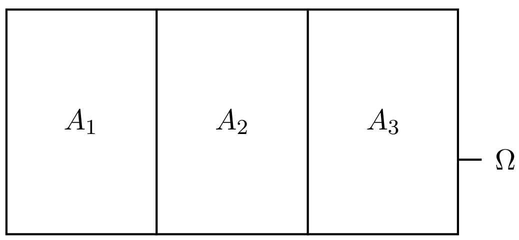
1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur les branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

III Formule des probabilités totales

Définition
Soient A_1, A_2, ..., A_n des événements de probabilités non nulles d'un univers Ω.
On dit que A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque :

1. $\Omega = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,
2. et les événements A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux incompatibles ($A_i\cap A_j=\varnothing$ pour tous $i\neq j$, i et j étant des entiers compris entre 1 et n.).

Exemple :

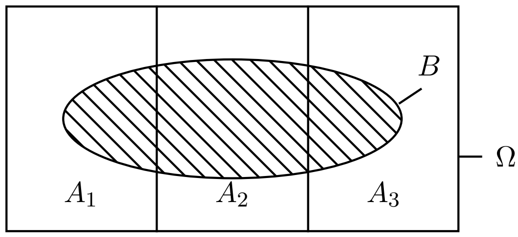


A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers Ω.

Remarque
Soit A un événement tel que $P(A)\in]0;1[$. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Propriété (probabilités totales)
Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)\\ &= P(A_1)\times P_{A_1}(B)+P(A_2)\times P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)\times P_{A_n}(B)\end{aligned}$$



Remarque
Soit A un événement tel que $P(A) \in]0;1[$. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
Dans ce cas, la formule des probabilités totales s'écrit :
Pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

IV Indépendance

Définition
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).
On dit que A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Remarque
1. Lorsque $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, on dit que A et B sont indépendants.
2. Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la probabilité de l'autre : $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

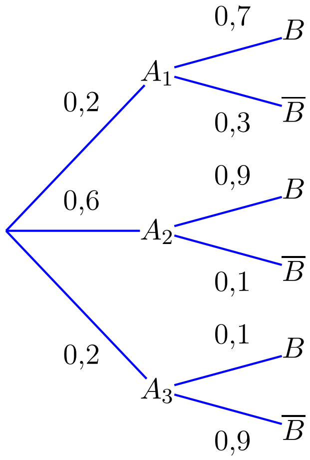
Conséquence
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque
Ne pas confondre événements incompatibles et indépendants :
- A et B incompatibles : $A \cap B = \varnothing$ (A et B ne peuvent pas être réalisés ensemble) d'où $P(A \cap B) = 0$.
- A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, (non nul si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

Exemples : lancer successivement des pièces, des dés, répéter le tirage d'un bille dans une urne qui contient toujours le même nombre de billes (tirages avec remise) sont des expériences indépendantes.

Exercice 1
On donne l'arbre pondéré suivant.



1. Montrer que A_1 et B sont indépendants.
2. Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B sont-ils indépendants ?

Remarque
Si les événements A et B sont indépendants, alors :

1. $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
2. A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration
On va montrer que (A et B indépendants) $\Rightarrow$ ($\overline{A}$ et B indépendants).
Supposons que A et B soient indépendants.
On va montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
On a toujours $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(\overline{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

En effet, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$.
Donc $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants. $\square$

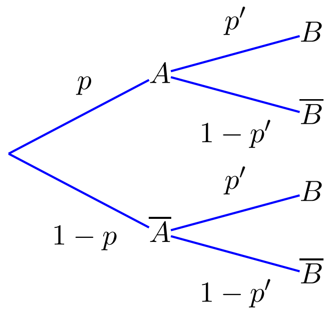
Remarque
Dans le cas de deux événements A et B de probabilités non nulles, l'indépendance peut se lire sur un tableau d'effectifs ou un arbre de probabilités :

1. Tableau d'effectifs :
   Lorsque A et B sont indépendants, le tableau d'effectifs (hors totaux) est un tableau de proportionnalité.

	A	$\overline{A}$	Total
B	1	2	3
$\overline{B}$	3	6	9
Total	4	8	12

   $P(B) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
   $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$. Donc $P(B) = P_A(B)$.
   A et B sont indépendants.

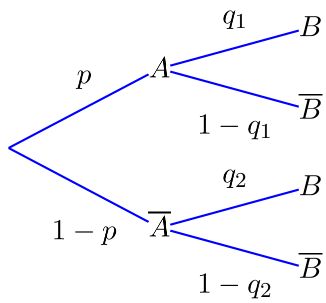
2. Arbre de probabilité : A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.
   Autrement dit, on retrouve les mêmes probabilités conduisant à B sur le 2^{e} niveau de branche, que l'on parte de A ou de $\overline{A}$.



Exercice 2
On se propose de démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente :
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } P_A(B) = P_{\overline{A}}(B).$$

1. Implication directe.
   On suppose que A et B sont indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.



2. Réciproque.
   On suppose que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$. Montrer que A et B sont indépendants.