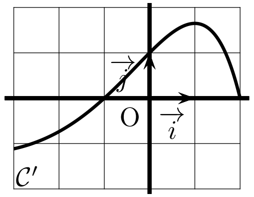
Correction du dm n° 6

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
   Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative ou nulle. L'affirmation est VRAIE.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
   Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. L'affirmation est VRAIE.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
   Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0]$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les réels de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. L'affirmation est FAUSSE.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.
   Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. L'affirmation est VRAIE.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1; 7]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3-4x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1; 7]$.
   Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 3 - 4x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $3 - 4x = 0$ ssi $x = \dfrac{3}{4}$. Donc $3 - 4x$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[1; 7]$.
   Par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[1; 7]$.
2. Calculer $f'(x)$.
   Pour tout $x \in [1; 7]$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x(3-4x) - x^2 \times (-4)}{(3-4x)^2} = \dfrac{-4x^2+6x}{(3-4x)^2}.}$
3. Déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x \in [1; 7]$.
   On cherche les variations de f sur $[1; 7]$, et donc on étudie le signe de $f'(x)$.
   $(3-4x)^2 > 0$ sur $[1; 7]$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur : $-4x^2 + 6x$.
   $-4x^2 + 6x = 2x(-2x + 3)$.
   Le trinôme $-4x^2 + 6x$ s'annule donc pour $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{2}$.
   Il est négatif (signe de a, $a = -4$) à l'extérieur des racines.
   En se limitant à l'intervalle d'étude $[1; 7]$, on a donc :

x	1		3/2		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	-0.75	↘	$-1,96$

$f(1) = \dfrac{1}{3-4} = -1$. $f(1,5) = \dfrac{1.5^2}{3 - 4 \times 1,5} = -0,75$.
$f(7) = \dfrac{7^2}{3 - 4 \times 7} = -\dfrac{49}{25} = -1,96$.
Sur l'intervalle $[1; 7]$, le maximum de f est de -0.75, et le minimum de f est de $-1,96$. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [1; 7],\ -1,96 \leqslant f(x) \leqslant -0,75.}$

Exercice 3 (65 page 293 - Monte-Carlo)

1. Algorithme
   $c \leftarrow 0$
   Pour k allant de 1 à n
   $x \leftarrow$ Valeur aléatoire entre 0 et 1
   $y \leftarrow$ Valeur aléatoire entre 0 et 1
   Si $y < f(x)$ alors
   $c \leftarrow c + 1$
   Fin Si
   Fin Pour
   $f \leftarrow \dfrac{c}{n}$.
2. Fonction Python

```
from random import *
def ex65p293(n):
    c=0
    for k in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y<1/(1+x**2):
            c=c+1
    return(c/n)
```

3. Valeur approchée de $\mathcal{A}$.
   Avec $n = 10^7$, on a l'estimation $\mathcal{A} \approx 0,785$.
   Pour information, $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0,7853981634$.

Exercice 4 (TP1 page 327 - le lièvre et la tortue)

A – Expérimentation

1. (a) La variable `d` correspond au résultat du lancer du dé. La variable `n` correspond au nombre de lancers du dé dans la partie.

   (b) Cette fonction renvoie une liste de deux nombres.
   Le premier est le nombre total de lancers effectués dans la partie.
   Le second est soit 0 soit 1 : 0 signifie que la tortue a gagné (pas de 6 lors d'une répétition de 6 lancers), et 1 signifie que le lièvre a gagné (un 6 est sorti durant les .

2. Fonction `replievre(n)`

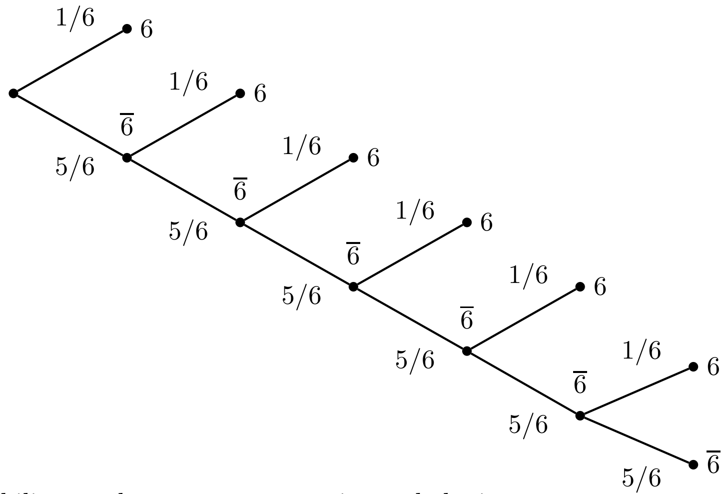
```
def replievre(n):
    A=0
    B=0
    for i in range(n):
        L=lievre()
        A=A+L[1]
        B=B+L[0]
    return(A/n,B/n)
```

Pour $n = 500000$, on obtient sur un exemple (0.665262, 3.989332), ce qui signifie que sur une simulation de 500000 parties, la fréquence des parties gagnées par le lapin est 0,665262, et qu'il y a environ 4 lancers en moyenne par partie.

B – Étude théorique

Soit X la variable donnant le nombre de pas pour arriver au but.

1. Arbre pondéré



2. Probabilité que la tortue gagne, puis que le lapin gagne.
   Notons p la probabilité que la tortue gagne.
   $p = \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 = \dfrac{15625}{46656} \approx 0,3349.$
   Alors la probabilité que la lapin gagne est $1-p$.
   $1-p = 1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6 = \dfrac{31031}{46656} \approx 0,6651.$

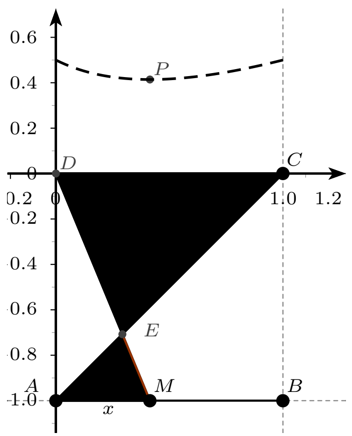
3. Loi de X.
   X désigne le nombre de pas pour arriver au but (ou le nombre de lancers de partie).
   Les valeurs possibles de X sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
   $P(X=1) = P(6) = \dfrac{1}{6}.$
   $P(X=2) = P(\overline{6};6) = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6^2} = \dfrac{5}{36}.$
   $P(X=3) = P(\overline{6};\overline{6};6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5^2}{6^3} = \dfrac{25}{216}.$
   $P(X=4) = P(\overline{6};\overline{6};\overline{6};6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5^3}{6^4} = \dfrac{125}{1296}.$
   $P(X=5) = P(\overline{6};\overline{6};\overline{6};\overline{6};6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5^4}{6^5} = \dfrac{625}{7776}.$
   $P(X=6) = P(\overline{6};\overline{6};\overline{6};\overline{6};\overline{6}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 = \dfrac{5^5}{6^5} = \dfrac{3125}{7776}.$

4. $E(X)$, conclusion.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i = 1\times\dfrac{1}{6} + \cdots + 6\times\dfrac{3125}{7776} \approx 3,99.$
   La probabilité théorique que le lapin gagne est d'environ 0,6651. En moyenne, il y a environ 3,99 lancers par partie (interprétation de $E(X)$). Ces résultats sont cohérents avec les fréquences obervées sur un grand nombre de simulations à la partie A.

Exercice 5

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$. Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E. Le but du problème est de déterminer l'aire colorée minimale, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

Étude expérimentale



> Il semble que $\mathcal{A}$ soit minimale pour $AM \approx 0,41$ et que l'aire $\mathcal{A}$ minimale soit environ $0,41$.

Étude algébrique

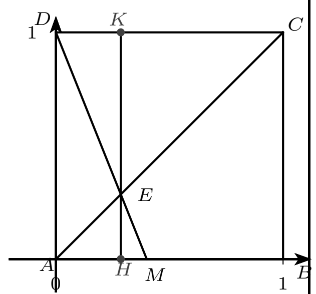
On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteurs issues de E dans les triangles EAM et ECD.

1. À quel intervalle appartient x ?

   > Comme $M \in [AB]$ et que $AB = 1$, on a $x \in [0;1]$.

2. Démontrer que $EH = \dfrac{x}{x+1}$ et $EK = \dfrac{1}{x+1}$.

   Si $M = A$, alors $H = E = A$, et $K = D$, et l'on a $EH = 0$, et $EK = 1$, ce qui convient avec les expressions $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{1}{x+1}$ lorsque $x = 0$.
   Désormais, on suppose que M est distinct de A. Dans le trianlge ADM, les droites (EH) et (AD) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{EH}{AD}$.



   Or, le triangle AHE est rectangle isocèle en H, et l'on a donc $HA = HE$.
   En notant $a = EH$ la longueur que l'on cherche à exprimer, on cela donne $\dfrac{x-a}{x} = \dfrac{a}{1}$.

   On va isoler $EH = a$ dans cette dernière relation.
   Par produit en croix, $ax = x - a$ puis $a(1+x) = x$, et enfin $a = \dfrac{x}{1+x}$.

   > On a donc $EH = \dfrac{x}{1+x}$.

   > Comme $EH + EK = 1$, $EK = 1 - EH = \dfrac{1}{1+x}$.

3. En déduire qu'une expression de l'aire colorée est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.

   $$Aire(AME) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AM \times EH}{2} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{2(x+1)}.$$
   $$Aire(CDE) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{CD \times EK}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2(x+1)}.$$

   > Ainsi, $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.

4. Démontrer la conjecture du 1.
   $x + 1 = 0$ ssi $x = -1$. Donc $x+1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$.
   Par quotient de fonctions dérivables, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0;1]$.
   Pour tout $x \in [0;1]$,
   $$\mathcal{A}'(x) = \frac{2x(2x+2) - (x^2+1) \times 2}{4(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-2}{4(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}.$$
   Un carré est toujours positif, et $x+1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$, donc pour tout $x \in [0;1]$, $2(x+1)^2 > 0$.
   Donc $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de x^2+2x-1.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8 > 0$.
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \approx -2,41.$$
   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \approx 0,41.$$
   Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$\mathcal{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}(x)$	$1/2$	$\searrow$	$\mathcal{A}(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	$1/2$

$$\mathcal{A}(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{2(\sqrt{2}-1+1)} = \frac{3-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

> Donc l'aire étudiée est minimale pour $AM = \sqrt{2}-1 \approx 0,4142$ et l'aire minimale est $\sqrt{2}-1 \approx 0,4142$.