Sde GT1. Correction du contrôle n° 4
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

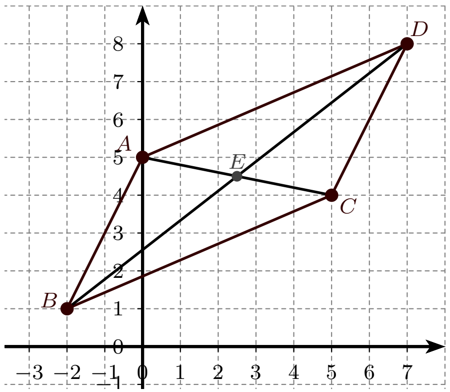
Compléter les formules de cours.

1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé.
   (a) La distance AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
   (b) Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$
2. Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
3. Pour tout réel non nul a et tout entier n, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exercice 2 (6 points)

Dans un repère du plan, on donne les points $A(0; 5)$, $B(-2; 1)$, $C(5; 4)$.

1. Placer les points A, B, C.



2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-5 \end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}}$
3. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis placer D.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 4 - y_D \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $5 - x_D = -2$, donc $x_D = 7$, et $4 - y_D = -4$, soit $y_D = 8$.
   $\boxed{\text{Le point } D \text{ tel que } ABCD \text{ soit un parallélogramme est } D(7; 8).}$
4. Déterminer les coordonnées du centre E du parallélogramme.
   Dans un parallélogramme, le centre de symétrie est le point d'intersection des diagonales, et les diagonales se coupent en leur milieu.
   Donc E est le milieu de la diagonale $[AC]$.
   $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0+5}{2} = 2,5$.
   $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+4}{2} = 4,5$.
   $\boxed{\text{Le centre du parallélogramme est le point } E(2,5; 4,5).}$

Exercice 3 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1; 2)$ et de rayon 5.
M est le point de coordonnées $(-2; 6)$.

1. Calculer la distance AM.
   $AM = \sqrt{x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (6-2)^2}$
   $\boxed{AM = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.}$
2. M appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? Justifier.
   $\boxed{\text{Comme la distance } AM \text{ est égale au rayon du cercle, } M \in \mathscr{C}.}$

Exercice 4 (6 points)

Pour tout l'exercice, les calculs seront soigneusement détaillés.

1. Mettre sous forme d'une puissance de 4 :
   $A = \dfrac{4^{-3}}{4^{-2}} = 4^{-3+2} = 4^{-1}$
   $B = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-4} = (4^{-1})^{-4} = 4^{-1\times(-4)} = 4^4$
2. Mettre sous forme d'une puissance de 10 :
   $C = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$
   $D = \dfrac{100^3}{0,01^2} = \dfrac{(10^2)^3}{(10^{-2})^2} = \dfrac{10^6}{10^{-4}} = 10^{6+4} = 10^{10}$.
3. Écrire sous forme d'une seule racine carrée, soit $\sqrt{a}$ où a est un nombre positif.
   $E = 3\sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 10 \times 2} = \sqrt{180}$
   $F = \dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{35}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{6 \times 35}{15}} = \sqrt{\dfrac{3 \times 2 \times 5 \times 7}{3 \times 5}} = \sqrt{14}$.

4. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.
   $G = \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$
   $H = \sqrt{180} = \sqrt{9 \times 4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Exercice 5 (4 points)
L'an prochain, Mathilde consacrera 650 euros à ses loisirs, puis, pour faire des économies, elle prévoit à partir de l'année suivante de réduire de 5 % ses dépenses dans ce secteur.

1. Calculer le budget loisirs B de Mathilde dans deux ans.
   Diminuer de 5 % revient à multiplier par $1 - 0,05 = 0,95$.
   $650 \times 0,95 = 617,5$.
   La deuxième année, elle consacrera 617,5 euros à ses loisirs.
2. Quel budget aura-t-elle consacré à ses loisirs au cours des deux prochaines années ?
   $650 + 617,5 = 1267,5$.
   Au cours des deux prochaines années, elle consacrera 1267,5 euros à ses loisirs.
3. Compléter le programme Python ci-dessous afin que la fonction `budget` retourne le budget total qu'elle aura consacré à ses loisirs au cours des 10 prochaines années.

```
def budget():
    B=650.................................
    T=650.................................
    for k in range(2,11):
        B=B*0,95........................
        T=T+B...........................
    return(T)
```

   Commentaires : Avant la boucle pour, les variables B et T ont les valeurs de la première année.
   Il faut alors faire 9 tours de boucle pour aller de la 2e à la 10e année.

Exercice 6 (bonus, 1 point)
Écrire sans radical au dénominateur $\dfrac{1}{7-\sqrt{3}}$.
On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée : $7+\sqrt{3}$

$$\boxed{\frac{1}{7-\sqrt{3}} = \frac{7+\sqrt{3}}{(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3})} = \frac{7+\sqrt{3}}{7^2-3} = \frac{7+\sqrt{3}}{46}.}$$

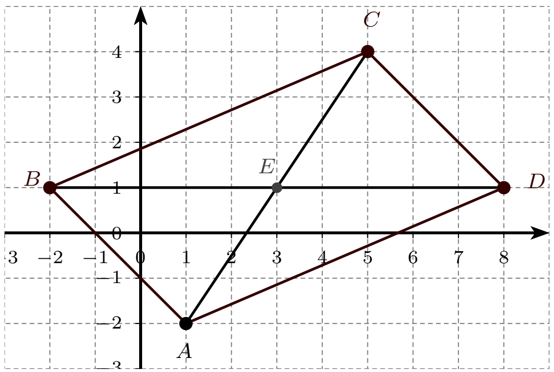
Sde GT1. Correction du contrôle n° 4
Sujet 2

Exercice 7 (cours, 2 points)
Compléter les formules de cours.

1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé.
   (a) La distance AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
   (b) Les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$ sont $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
2. Pour tous nombres positifs a et b, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.
3. Pour tout réel non nul a et tous entiers n et p, $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exercice 8 (6 points)
Dans un repère du plan, on donne les points $A(1; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(5; 4)$.

1. Placer les points A, B, C.



2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}}$
3. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis placer D.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 4 - y_D \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $5 - x_D = -3$, donc $x_D = 8$, et $4 - y_D = 3$, soit $y_D = 1$.
   $\boxed{\text{Le point } D \text{ tel que } ABCD \text{ soit un parallélogramme est } D(8; 1).}$
4. Déterminer les coordonnées du centre E du parallélogramme.
   Dans un parallélogramme, le centre de symétrie est le point d'intersection des diagonales, et les diagonales se coupent en leur milieu.
   Donc E est le milieu de la diagonale $[AC]$.
   $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+5}{2} = 3$.
   $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.
   $\boxed{\text{Le centre du parallélogramme est le point } E(3; 1).}$

Exercice 9 (2 points)
Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1; -2)$ et de rayon 5.
M est le point de coordonnées $(-2; 6)$.

1. Calculer la distance AM.
   $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (6+2)^2}$
   $\boxed{AM = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}.}$
2. M appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? Justifier.
   $AM = \sqrt{73} \neq 5$.
   $\boxed{\text{Comme la distance } AM \text{ n'est pas égale au rayon du cercle, } M \notin \mathscr{C}.}$

Exercice 10 (6 points)
Pour tout l'exercice, les calculs seront soigneusement détaillés.

1. Mettre sous forme d'une puissance de 4 :
   $A = \dfrac{4^5}{4^{-3}} = 4^{5+3} = 4^8$
   $B = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = (4^{-1})^{-2} = 4^{(-1)\times(-2)} = 4^2$
2. Mettre sous forme d'une puissance de 10 :
   $C = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
   $D = \dfrac{100^5}{0,01^3} = \dfrac{(10^2)^5}{(10^{-2})^3} = \dfrac{10^{10}}{10^{-6}} = 10^{10+6} = 10^{16}$.
3. Écrire sous forme d'une seule racine carrée, soit $\sqrt{a}$ où a est un nombre positif.
   $E = 3\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 8 \times 2} = \sqrt{144}$, $(E = 12)$
   $F = \dfrac{\sqrt{50} \times \sqrt{11}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\dfrac{50 \times 11}{10}} = \sqrt{55}$
4. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.
   $G = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
   $H = \sqrt{150} = \sqrt{15 \times 10} = \sqrt{3 \times 5 \times 5 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$.

Exercice 11 (4 points)
L'an prochain, Mathilde consacrera 650 euros à ses loisirs, puis, pour faire des économies, elle prévoit à partir de l'année suivante de réduire de 5 % ses dépenses dans ce secteur.

1. Calculer le budget loisirs B de Mathilde dans deux ans.
   Diminuer de 5 % revient à multiplier par $1-0,05=0,95$.
   $650\times 0,95=617,5$.
   La deuxième année, elle consacrera 617,5 euros à ses loisirs.

2. Quel budget aura-t-elle consacré à ses loisirs au cours des deux prochaines années ?
   $650+617,5=1267,5$.
   Au cours des deux prochaines années, elle consacrera 1267,5 euros à ses loisirs.

3. Compléter le programme Python ci-dessous afin que la fonction `budget` retourne le budget total qu'elle aura consacré à ses loisirs au cours des 10 prochaines années.

```
def budget():
    B=650...................................
    T=650...................................
    for k in range(2,11):
        B=B*0,95..........................
        T=T+B.............................
    return(T)
```

Commentaires : Avant la boucle pour, les variables B et T ont les valeurs de la première année.
Il faut alors faire 9 tours de boucle pour aller de la 2e à la 10e année.

Rappel : l'instruction `for k in range(d,n+1)` fait parcourir à k les entiers de d à n.

Exercice 12 (bonus, 1 point)
Écrire sans radical au dénominateur $\dfrac{1}{7-\sqrt{3}}$.

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée : $7+\sqrt{3}$

$$\boxed{\frac{1}{7-\sqrt{3}}=\frac{7+\sqrt{3}}{(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3})}=\frac{7+\sqrt{3}}{7^2-3}=\frac{7+\sqrt{3}}{46}.}$$