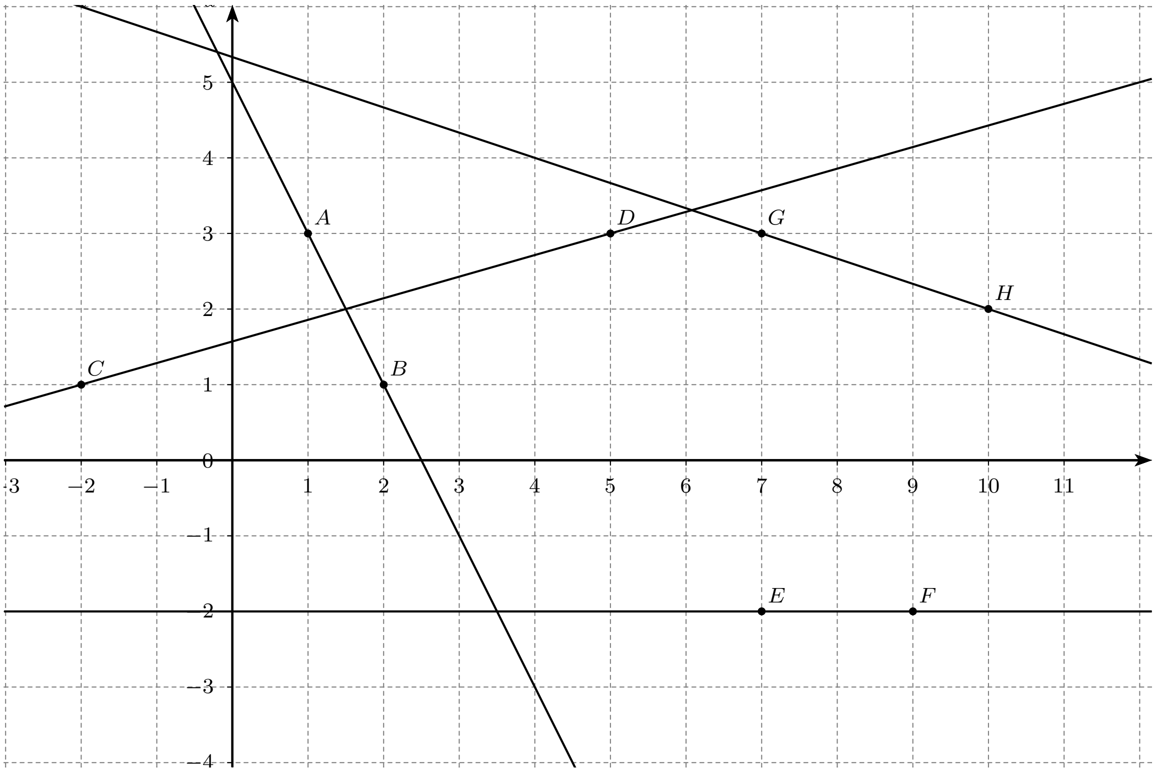
Chapitre 6 : Fonction dérivée

I Rappels sur les droites

I.1 Calculer ou lire un coefficient directeur à partir de 2 points

Définition
Dans un repère du plan, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points, avec $x_A \neq x_B$.
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exercice 1
Lire graphiquement le coefficient directeur des droites tracées ci-dessous. Vérifier par le calcul.



Réponses :
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = -2$.
Le coefficient directeur de la droite (CD) est $\dfrac{2}{7}$.
Le coefficient directeur de la droite (EF) est 0.
Le coefficient directeur de la droite (GH) est $-\dfrac{1}{3}$.

I.2 Tracer une droite connaissant un point et le coefficient directeur

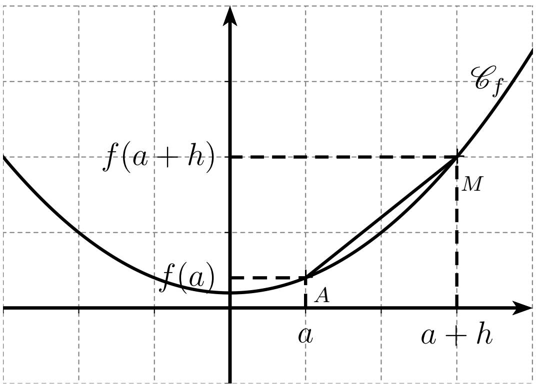
Exercice 2
Tracer les droites passant par le point donné et de coefficient directeur m donné.

1. d_1 passe par $A(1;3)$ et son coefficient directeur est $m=-2$.
2. d_2 passe par $B(-2;-4)$ et son coefficient directeur est $m=3$.
3. d_3 passe par $C(2;3)$ et son coefficient directeur est $m=-\dfrac{1}{3}$.
4. d_4 passe par $D(0;-3)$ et son coefficient directeur est $m=\dfrac{2}{5}$.

II Nombre dérivé et tangente

Définition (taux d'accroissement)
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.
Soit h un réel non nul, tel que $a+h \in I$.
le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque
Notons A et M les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et $a+h$.
On a donc $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.
Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).
En effet, $\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



Exercice 3
Posons $f(x)=x^2$, et $a=1$. Soit $h \neq 0$.
Exprimer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$.

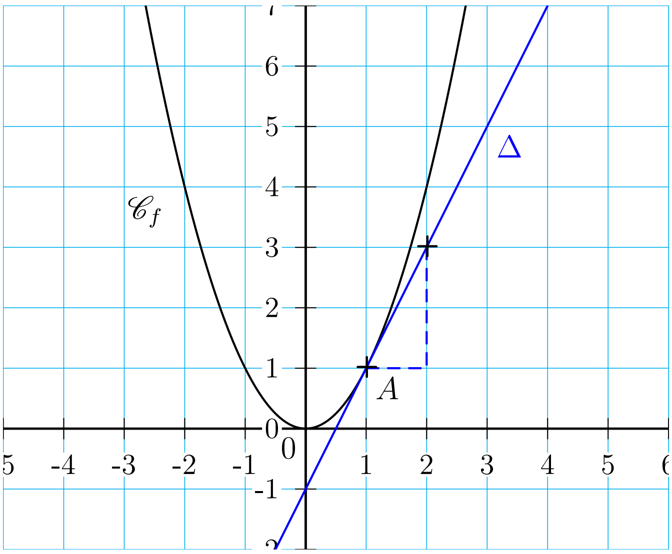
Définition (nombre dérivé)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exercice 4
On reprend $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
Montrons que f est dérivable en $a = 1$.
Soit $h \neq 0$.
$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \dfrac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$.
On a le droit de simplifier par h car $h \neq 0$.
Il vient donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$.
Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Définition (tangente)
Soit f une fonction dérivable en le réel a.
La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $A\,(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple :
On pose $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
On a vu que $f'(1) = 2$.
Donc la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.



Remarque
Pour tracer la tangente au point d'abscisse a, il suffit de placer le point $A(a; f(a))$ et d'exploiter le coefficient directeur $f'(a)$ pour obtenir un second point.

Propriété (équation de tangente)
Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple :
On reprend la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et $a = 1$.

Cherchons une équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction carrée en 1.
C'est la droite qui passe par le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$, et de coefficient directeur $f'(1) = 2$.
On applique la formule précédente :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1.$$

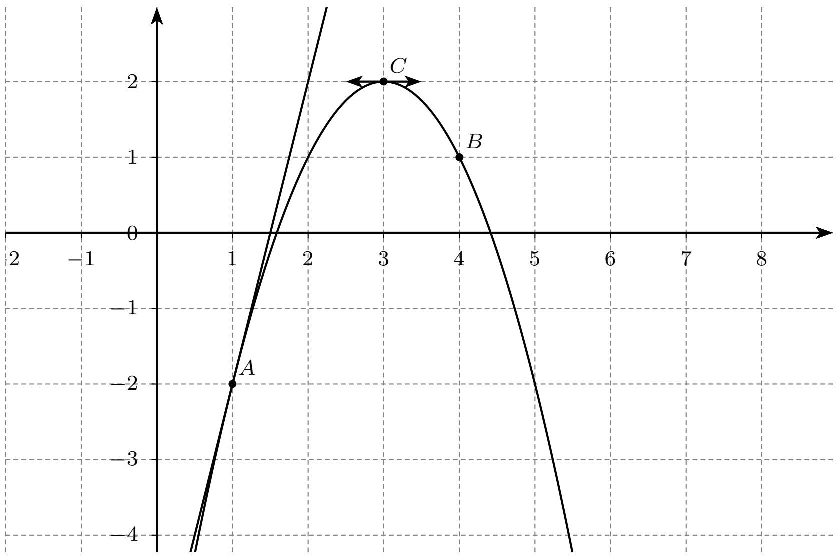
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est la droite T_1 d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 5
Soit f la fonction carré. On admet que $f'(-2) = -4$.
Déterminer une équation de la tangente T_{-2} à la courbe de f au point d'abscisse -2 et tracer cettte tangente sur le graphique précédent.

Remarque

— Une fonction f est dérivable en a si sa courbe admet en a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
— On retiendra que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Exercice 6
On a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.



1. Déterminer $f'(1)$. Justifier.
2. La tangente au point C est parallèle à l'axe des abscisses. En déduire un nombre dérivé de f.
3. On admet que $f'(4) = -2$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Expliquer la construction.

Remarque (Cas particulier à retenir)
Soit f une fonction dérivable en a.
$f'(a) = 0$ ssi la tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

III Fonction dérivée

Définition
Soit f un fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe.
Alors la fonction dérivée de f est la fonction notée f'. $f' : x \mapsto f'(x)$.

III.1 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème (à connaître par ♡)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$ $f(x) = ax + b$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = a$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^n$, $n \geqslant 1$	$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 3x^2$ $f(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$

Exemple :
$f(x) = x^5$, $\quad f'(x) = 5x^4$.
$f(x) = 3x - 4$ $\quad f'(x) = 3$.

III.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
   — la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Théorème (fonctions de la forme $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$)
Soient a et b deux nombres réels.
Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(ax+b) \text{ et } g(x) = \sin(ax+b).$$

Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -a\sin(ax+b) \text{ et } g'(x) = a\cos(ax+b).$$