1re G. Interrogation n° 9

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Expression du produit scalaire en repère orthonormé. Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé du plan.
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$
2. Énoncer les propriétés de symétrie et de linéarité du produit scalaire.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$, et k réel,
   Symétrie : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
   Linéarité : $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$
   et $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
3. Énoncer les deux expressions du produit scalaire avec les normes.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$

Exercice 2 (4 points)

Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. $AB = 6$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$. D'après la formule du cosinus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 6\times 7\times\cos(\frac{\pi}{6})\\ &= 42\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 21\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 21\sqrt{3}.}$

2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 16$.
   Par projeté, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{16^2}{2} = 128$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 128.}$
3. $AB = 5$, $BC = 3$, et $AC = 6$.
   $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
   D'après la formule avec les normes utilisant $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$,
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2) = \frac{1}{2}(25+36-9) = 26$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 26.}$

Exercice 3 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(1;-1)$, et $D(5-a;a)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

$(AB)\perp(CD)$ ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ -1\end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4-a \\ a+1\end{pmatrix}$.

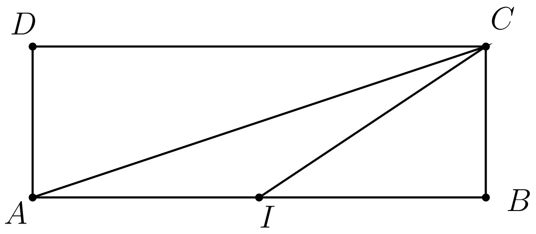
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = xx' + yy' = -6(4-a) + (-1)\times(a+1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -24 + 6a - a - 1 = 5a - 25$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ ssi $5a - 25 = 0$ ssi $a = 5$.

$\boxed{\text{Les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires si et seulement si } a = 5, \text{ soit } D(0;5).}$

Exercice 4 (5 points)
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.
On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ $\quad\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD}$ $\quad\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC}$
On raisonne par projeté orthogonal dans les trois cas.
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = -BC^2 = -4$
$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CD} = -DC^2 = -36$
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} = AI \times IB = 3^2 = 9.$

2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$.
Par relation de Chasles et linéarité,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \\
&= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BI} \\
&= 0 + CD \times BI + DA \times CB + 0 \\
&= 6 \times 3 + 2 \times 2 \\
&= 22
\end{aligned}$$

(b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ACI})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ à un degré près.
En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et BCA, on calcule les longueurs CI et CA.
$CI^2 = CB^2 + BI^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, donc $CI = \sqrt{13}$.
$CA^2 = CB^2 + BA^2 = 2^2 + 6^2 = 40$, donc $CA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
D'après la formule du cosinus,
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = CA \times CI \times \cos(\widehat{ACI})$.
Donc $22 = \sqrt{13} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\widehat{ACI})$
$\boxed{\cos(\widehat{ACI}) = \dfrac{22}{\sqrt{13} \times 2\sqrt{10}} = \dfrac{11\sqrt{130}}{130}.}$
Avec la calculatrice, $\boxed{\widehat{ACI} \approx 15 \text{ degrés.}}$

Exercice 5 (4 points)
Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 9$, $AD = 6$, et $BD = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
D'après la formule avec les normes utilisant $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - DB^2) = \dfrac{1}{2}(81 + 36 - 100) = \dfrac{17}{2}$.

2. En déduire la longueur de la diagonale AC.
Comme $ABCD$ est un parallélogramme,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
D'après la formule du produit scalaire avec les normes utilisant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, il vient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) \\
\frac{17}{2} &= \frac{1}{2}(AC^2 - 81 - 36) \\
AC^2 &= 17 + 81 + 36 \\
AC^2 &= 134 \\
AC &= \sqrt{134}
\end{aligned}$$