Correction du devoir commun de Mathématiques
Première S

Exercice 1 sur 5 points

1) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$ donc deux racines réels

$x_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow S = \{-\dfrac{1}{2} ; 2\}$

2) Il faut déterminer le sommet de la parabole S $(\alpha ; \beta)$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4}$ et $\beta = f(\alpha) = 2(\dfrac{3}{4})^2 - 3 \times \dfrac{3}{4} - 2 = -\dfrac{50}{16}$ et a = 2 > 0 donc orientée vers le haut.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Variation de f		↘	$-\frac{50}{16}$	↗	

3) $h(x) = f(x) - y = 2x^2 - 3x - 2 - 3x - 6 = 2x^2 - 6x - 8$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times2\times(-8) = 36 + 64 = 100 > 0$ donc deux racines réels

$x_1 = \dfrac{6-10}{4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{6+10}{4} = 4$

h(x) est du signe de a = 2 > 0 à l'extérieure des racines

Donc sur $]-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty[$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de D et sur $[-1 ; 4]$ $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de D.

4) $h(x) = f(x) - y = 2x^2 - 3x - 2 - 3x - k = 2x^2 - 6x - 2 - k$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times2\times(-2 - k) = 36 + 16 + 8k = 52 + 8k < 0$ car on veut qu'il ni ai aucun point d'intersection

Alors $k < -\dfrac{13}{2}$. **Donc $\mathscr{C}_f$ et la droite D_k n'ont aucun point d'intersection si $k < -\dfrac{13}{2}$.**

Exercice 2 sur 2 points

1/ Le domaine de définition de g est $\color{red}{\boldsymbol{D = [-10;-5] \cup [1;10]}}$

2/

x	-10		-5		0		1		3		10
Variation de f	16	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	9	↘	4
Variation de $\sqrt{f} = g$	4	↘	0	//////	//////	//////	0	↗	3	↘	2

Les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont le même sens de variation sur D

Exercice 3 sur 4 points

On donne $f(x) = |1 - x| + |2x - 6|$.

1/ $\boldsymbol{f(4)} = |1 - 4| + |2 \times 4 - 6| = |-3| + |2| = \color{red}{\boldsymbol{5}}$

et $\boldsymbol{f(-3)} = |1 - (-3)| + |2 \times (-3) - 6| = |4| + |-12| = \color{red}{\boldsymbol{16}}$

2/ $1-x \geq 0 \;\Leftrightarrow -x \geq -1 \;\Leftrightarrow x \leq 1$

$2x-6 \;\geq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\mathrm{x} \geq 6 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{x} \geq 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	0	$x-1$		$x-1$
$\lvert 2x-6\rvert$	$-2x+6$		$-2x+6$	0	$2x-6$
$f(x)$	$-3x+7$		$-x+5$		$3x-7$

On en déduit que $f(x) = \begin{cases} -3x+7 & si \;\; x \leq 1 \\ -x+5 & si \;\; 1 \leq x \leq 3 \\ 3x-7 & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$

3/ Si $x \leq 1$, $f(x) = 5 \;\Leftrightarrow\; -3x+7 = 5 \;\Leftrightarrow\; -3x = -2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{3}$. On vérifie que $\frac{2}{3} \leq 1$

Si $1 \leq x \leq 3$, $f(x) = 5 \;\Leftrightarrow\; -x+5 = 5 \;\Leftrightarrow\; x = 0$. Or, $0 \notin [1;3]$

Si $x \geq 3$, $f(x) = 5 \;\Leftrightarrow\; 3x-7 = 5 \;\Leftrightarrow\; 3x = 12 \;\Leftrightarrow\; x = 4$. On vérifie que $4 \geq 3$

Finalement, les solutions de $f(x) = 5$ sont $S = \left\{\frac{2}{3}\,;\,4\right\}$

Exercice 4 sur 3 points

1/ On va exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ dans la base $(\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MN}\left(\frac{-1}{4}\;;\;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{3}{4} - \alpha\right)\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MP}\left(\frac{3}{4} - \alpha\;;\;\alpha\right)$

2/ *Les points M, N et P sont alignés* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{MP}$ *sont colinéaires*

Les points M, N et P sont alignés $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\alpha = 0 \;\Leftrightarrow \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow\; \boldsymbol{\alpha = \frac{3}{2}}$

Exercice 5 sur 3,5 points

Soient les points A(-1 ; -1), B(7 ; 0) C(5 ; 4) et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dans un repère du plan.

1/ Équation de la droite (d) passant par A et dirigée par $\vec{v}$

Soit $M(x\,;y) \in$ (d) $\;\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow\; 1(x+1) - 2(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x - 2y - 1 = 0}$

2/ Équation de la droite (BC) avec $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

Soit $M(x\,;y) \in$ (BC) $\;\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-7\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow\; 4(x-7) - (-2y) = 0$

$\Leftrightarrow\; 4x + 2y - 28 = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; 2x + y - 14 = 0$

La droite (BC) a pour équation <u>réduite</u> $\boldsymbol{y = -2x + 14}$

3/ Montrons que (d) et (BC) sont sécantes :

(d) a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Les droites (d) et (BC) n'ont pas le même coefficient directeur ($\frac{1}{2} \neq -2$)

Donc (d) et (BC) sont sécantes. *(on aurait pu aussi démontrer la non proportionnalité des coefficients de deux équations cartésiennes ou la non colinéarité des deux vecteurs directeurs).*

4/ Déterminons le point d'intersection E des droites (d) et (BC). Ses coordonnées vérifient à la fois les deux équations. On doit résoudre le système : : $\begin{cases} x_E - 2y_E - 1 = 0 \\ y_E = -2x_E + 14 \end{cases}$ *(Ici, on résout par substitution, on aurait pu résoudre par combinaison linéaire en prenant les deux équations cartésiennes).*

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2(-2x_E + 14) - 1 = 0 \\ y_E = -2x_E + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_E = 29 \\ y_E = -2x_E + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{29}{5} = 5{,}8 \\ y_E = -2\times\frac{29}{5} + 14 = \frac{12}{5} = 2{,}4 \end{cases}$

Les droites (d) et (BC) se coupent en E $(\frac{29}{5} ; \frac{12}{5})$.

Exercice 6 sur 2,5 points

1. Lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
   Comme $\pi \approx 3,14$, il est clair que $0 \leqslant \pi - 3 \leqslant 1$.
   Donc $(\pi - 3)^2 \leqslant \pi - 3 \leqslant \sqrt{\pi - 3}$.

2. La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

   Donc la droite d'équation $3x + 2y - 2 = 0$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Équation de la parabole de sommet $S(3;4)$ et passant par $A(0;-1)$.
   En exploitant la forme canonique de seconde, $(\alpha;\beta)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
   Donc il existe un réel a non nul tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-3)^2 + 4$.
   Comme $A(0;-1) \in \mathscr{C}_f$, $f(0) = -1$, soit $-1 = a(0-3)^2 + 4$, et $a = -\frac{5}{9}$.
   Finalement, la parabole a pour équation $y = -\frac{5}{9}(x-3)^2 + 4$.

4. On donne $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.