Chapitre 4 : Suites monotones et convergence

Propriété
Si une suite est croissante et converge vers un réel ℓ, alors elle est majorée par ℓ.

Démonstration
On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$).
On raisonne par l'absurde.
Si (u_n) n'est pas majorée par ℓ, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > \ell$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p \qquad (*)$.
Or, par définition d'une suite convergeant vers ℓ, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
En particulier, l'intervalle $]\ell - 1; u_p[$ doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Ceci est en contradiction avec $(*)$.
Donc l'hypothèse de départ – (u_n) n'est pas majorée par ℓ – est fausse.
Conclusion : (u_n) est majorée par ℓ. □

Théorème (Convergence monotone)
Toute suite croissante majorée converge.
Toute suite décroissante minorée converge.

Remarque
Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge sans avoir à chercher sa limite.
Attention, en pratique, si (u_n) est croissante et si pour tout entier n, $u_n < A$, on en déduit que $\ell \leqslant A$ (mais il serait faux d'en déduire que $\ell < A$).

Exemple :
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 4 + \dfrac{1}{n}$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 4 : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 4$.
On peut en déduire que (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 4$ (mais surtout pas $\ell > 4$).
Dans ce cas simple, on peut calculer la limite, et $\lim u_n = 4$.

Théorème
Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration
Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit $A > 0$.
Comme (u_n) n'est pas mojorée, il existe un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$, et donc $u_n > A$.
Par définition, $\lim u_n = +\infty$. □

Remarque
1. On retiendra que pour une suite croissante, il n'y a que deux situations possibles :
   — soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge vers une limite réelle.

— soit elle n'est pas majorée, et dans ce cas elle diverge vers $+\infty$.

2. Toute suite convergente est bornée.
3. Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
4. Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 1

Donner des exemples de suites vérifiant les conditions suivantes.

1. (u_n) croissante et majorée par 10.
   $u_n = 10 - \dfrac{1}{n}$, ou $u_n = 8 - 0,6^n$.
2. (u_n) croissante et non majorée.
   $u_n = n^2$, ou $u_n = 6^n$.
3. (u_n) décroissante et $\lim u_n = 1$.
   $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, ou $u_n = 1 + 0,2^n$.
4. (u_n) bornée et (u_n) non convergente.
   $u_n = (-1)^n$, ou $u_n = \cos(n)$.
5. (u_n) convergente et (u_n) non monotone.
   $u_n = (-0,8)^n$, ou $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
6. (u_n) divergente et (u_n) non monotone.
   $u_n = (-2)^n$.
7. (u_n) qui diverge vers $+\infty$ et pourtant (u_n) n'est pas croissante.
   $u_n = n + 6 \times (-1)^n$.

Exercice 2

On va démontrer ce dernier exemple.
Soit, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = n + 6 \times (-1)^n$.

1. Montrer que $\lim u_n = +\infty$.
   Pour tout n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $-6 \leqslant 6 \times (-1)^n \leqslant 6$.
   Ainsi, on a $n - 6 \leqslant u_n \leqslant n + 6$.
   Comme $\lim n - 6 = +\infty$, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
2. Montrer que (u_n) n'est pas croissante.
   $u_0 = 0 + 6 \times 1 = 6$.
   $u_1 = 1 - 6 = -5$.
   Donc (u_n) n'est pas croissante.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.

1. Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ et montrer que $f([1;4]) \subset [1;4]$.
2. Montrer que (u_n) est croissante majorée par 4.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Notons $\ell = \lim u_n$. On admet que ℓ est un point fixe de f (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$). Déterminer la valeur de ℓ.