1G. Interrogation n° 1.
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Exercice 2 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x-1)^2 + 3$. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -5$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

Comme $a = -5 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

Le sommet est $S(1; 3)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Exercice 3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 9x - 11 = 0$.
   $a = 2$, $b = -9$ et $c = -11$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-11) = 81 + 88$
   $\Delta = 169 = 13^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-13}{4} = -1$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+13}{4} = \dfrac{11}{2}$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont } \dfrac{11}{2} \text{ et } -1.}$

2. $-2x^2 + 3x - 1 = -5x + 7$.
   Cela équivaut à $-2x^2 + 8x - 8 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 0$.
   L'équation admet une seule solution.
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = 2$. $\boxed{S = \{2\}}$

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 7$. Mettre $f(x)$ sous forme canonique. Justifier.

$a = 3$, $b = -1$ et $c = 7$.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2 \times 3} = \dfrac{1}{6}$.

$\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{6} + 7 = \dfrac{1 - 2 + 7 \times 12}{12} = \dfrac{83}{12}$.

$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3\left(x - \dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{83}{12}.}$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - x + 7 \\
&= 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 7 \\
&= 3\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] + 7 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{36} + 7 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{7 \times 12}{12} \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Bonus, 1 point)

$\boxed{\text{Voir la correction du sujet 2.}}$

1G. Interrogation n° 1.
Correction du sujet 2

Exercice 1

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
— Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
— Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 2 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+5)^2 - 7$. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a = 2$, $\alpha = -5$ et $\beta = -7$.
Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Le sommet est $S(-5; -7)$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

Exercice 3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$.
   $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont 1 et 3.}}$
2. $2x^2 + 5x - 3 = -3x - 11$ Cela revient à $2x^2 + 8x + 8 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (2) \times (8) = 0$.
   L'équation admet une seule solution.
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times 2} = -2$.
   $\boxed{\text{L'équation a une seule solution qui est } -2.}$

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 7x + 7$. Mettre $f(x)$ sous forme canonique. Justifier.
$a = -2$, $b = -7$ et $c = 7$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-7)}{2 \times (-2)} = -\dfrac{7}{4}$.
$\beta = f(\alpha) = f\left(-\dfrac{7}{4}\right) = -2 \times \left(-\dfrac{7}{4}\right)^2 - 7 \times \dfrac{-7}{4} + 7$
$\beta = \dfrac{-49 + 2 \times 49 + 56}{8} = \dfrac{105}{8}$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{105}{8}.}$$

Exercice 5 (Bonus)

Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(-1; 3)$ et passe par le point $A(-5; 7)$.
Comme le sommet est $S(-1; 3)$, il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+1)^2 + 3$ (forme canonique).
Comme $A(-5; 7) \in \mathscr{C}_f$, on a de plus $f(-5) = 7$, ce qui donne $a(-5+1)^2 + 3 = 7$, donc $16a = 4$, et $a = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 3.}$$