Correction non détaillée de l'interrogation n° 5
Sujet 1

Exercice 1 (3 points)

1. Donner le module et un argument du nombre complexe $2-2\mathrm{i}$.
   $2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
2. En déduire la forme algébrique de $Z=(2-2\mathrm{i})^5$.
   $Z=(2-2\mathrm{i})^5 = (2\sqrt{2})^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/4} = 128\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$.
   $Z=-128+128\mathrm{i}$.

Exercice 2 (3 points)
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=3+\mathrm{i}$, et $c=2\mathrm{i}$.
Calculer le rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$ et interpréter géométriquement le résultat.

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{-2+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\\ &= \frac{(-2+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}\\ &= \frac{4\mathrm{i}}{2}\\ &= 2\mathrm{i}\end{aligned}$$

$AC=2AB$, $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}$. Donc le triangle ABC est rectangle en A direct, et non isocèle ($AB\neq AC$).

Exercice 3 (3 points)
f est la fonction définie sur $I=[0;2\pi]$ par

$$f(x)=x\sqrt{2}+2\cos x.$$

Déterminer le tableau de variation de f.
$f'(x)=\sqrt{2}-2\sin x$.
$f'(x)>0$ ssi $\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur $[0;2\pi]$, $f'(x)>0$ ssi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{3\pi}{4};2\pi\right]$.

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\pi\sqrt{2}/4+\sqrt{2}$	$\searrow$	$3\pi\sqrt{2}/4-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\pi\sqrt{2}+2$

Exercice 4 (1 point)
Donner une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(3x)$.
$F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x)$.

Interrogation n° 5
Sujet 2

Exercice 5 (3 points)
Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.
Donner la forme algébrique de z, puis les formes algébriques et exponentielles de $-z$, $\overline{z}$, et $\dfrac{1}{z}$.
On justifiera la forme algébrique et la forme exponentielle de $\dfrac{1}{z}$.

$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
$-z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$.
$\overline{z} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$.
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{4} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 6 (3 points)
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 6$ et $z_C = (3+\sqrt{3}) + \mathrm{i}(3\sqrt{3}+1)$.
Montrer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Que peut-on en déduire ?

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{(3+\sqrt{3}) + \mathrm{i}(3\sqrt{3}-1)}{6-2\mathrm{i}} \\
&= \frac{[(3+\sqrt{3}) + \mathrm{i}(3\sqrt{3}-1)] \times (6+2\mathrm{i})}{6^2+2^2} \\
&= \frac{18+6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+2+\mathrm{i}(6+2\sqrt{3}+18\sqrt{3}-6)}{40} \\
&= \frac{20+20\sqrt{3}\mathrm{i}}{40} \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Donc $AB = AC$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
Le triangle ABC est équilatéral direct.

Exercice 7 (3 points)
f est la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par

$$f(x) = x - 2\sin x.$$

Déterminer le tableau de variation de f.
$f'(x) = 1 - 2\cos x$.
$f'(x) > 0$ ssi $\cos x < \dfrac{1}{2}$.
Sur $[0; 2\pi]$, $f'(x) > 0$ ssi $x \in \left]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right[$.

x	0		$\pi/3$		$5\pi/3$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\pi/3 - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$5\pi/3 + \sqrt{3}$	$\searrow$	2π

Exercice 8 (1 point)
Donner une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(7x)$.
$F(x) = \dfrac{1}{7}\sin(7x)$.