Chapitre 11 : Fonctions polynômes du second degré.

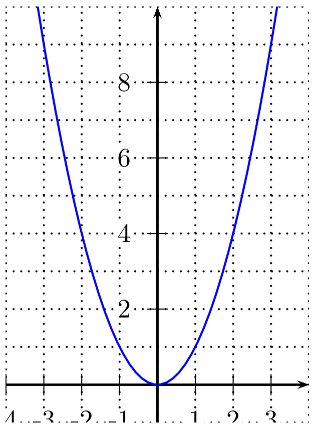
I Fonctions trinômes du second degré

Définition
Une fonction f est une fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) s'il existe des réels a, b, et c, avec $a \neq 0$, tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemple :
Soit f la fonction définie qur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
Les coefficients sont $a = 3$, $b = -6$, et $c = 1$. On peut vérifier que a est non nul.

Remarque
La fonction carré, définie par $f(x) = x^2$ est une fonction du second degré.
Les coefficients sont $a = 1$, $b = 0$, et $c = 0$.



Définition (et théorème)
Pour toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe des réels α et β uniques tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de f.

Exercice 1
Reconnaître les coefficients a, α et β dans les formes canoniques suivantes :

1. $f(x) = 7(x - 3)^2 + 4$
2. $g(x) = -(x + 6)^2 + 2$
3. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 5$

Exercice 2

1. Vérifier que $-3(x + 1)^2 - 4 = -3x^2 - 6x - 7$.
2. Montrer que $2(x - 7)^2 - 1 = 2x^2 - 28x + 97$.

Exercice 3
Mettre sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$:

1. $f(x) = x^2 - 6x - 1$.
2. $g(x) = 2x^2 + 8x + 1$.
3. $h(x) = -3x^2 + 12x + 5$

Remarque
À partir de la forme canonique, il est toujours possible de résoudre l'équation $f(x) = 0$ par le calcul et d'étudier le signe de $f(x)$.
La forme canonique est également appropriée pour étudier les variations de la fonction (et déterminer les eventuels extrema).

Exercice 4
Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (x - 5)^2 - 36$
2. $g(x) = 7(x + 2)^2 + 3$
3. $h(x) = -2(x + 1)^2 + 18$.

Théorème (Tableau de variation)
Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ une fonction du trinôme du second degré sous forme canonique ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration
Cas où $a > 0$.
Montrons que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty; \alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \ldots v - \alpha \ldots 0$.
Or, ...
....
Donc $(u - \alpha)^2 \ldots (v - \alpha)^2$
En multipliant par $a > 0$, il vient :

$$a(u - \alpha)^2 \ldots a(v - \alpha)^2$$

En ajoutant une constante (b), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc ....
Ainsi, $f(u) \ldots f(v)$.
f est .... sur $]-\infty; 0]$

Cas où $a < 0$.
Montrons que f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty; \alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \ldots v - \alpha \ldots 0$.
Or, ...
....
Donc $(u - \alpha)^2 \ldots (v - \alpha)^2$
En multipliant par $a < 0$, il vient :

$$a(u - \alpha)^2 \ldots a(v - \alpha)^2$$

En ajoutant une constante (b), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc ....
Ainsi, $f(u) \ldots f(v)$.
f est .... sur $]-\infty; 0]$

Les deux autres cas qui complètent la démonstration se montrent de façon analogue. $\square$

Exercice 5 (prolongement de l'ex 1)
Á partir des formes canoniques suivantes, dresser le tableau de variation de la fonction.

1. $f(x) = 7(x-3)^2 + 4$
2. $g(x) = -(x+6)^2 + 2$
3. $h(x) = -2(x+1)^2 - 5$

Propriété (Courbe représentative)
Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est une parabole :

— tournée vers le haut si $a > 0$,
— tournée vers le bas si $a < 0$.

Son sommet est le point $S(\alpha; \beta)$.
La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le sommet est axe de symétrie de la parabole.

Remarque
En première, on verra que si $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, l'abscisses du sommet est $x_S = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
On peut alors déterminer le sommet sans passer par la forme canonique :

1. son abscisse est $x_S = -\dfrac{b}{2a}$,
2. son ordonnée est $y_S = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Exercice 6
Soit $f(x) = x^2 - 6x + 13$.
Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe de f.
Préciser comment est tournée la parabole.

Exercice 7
Soit f la fonction du second degré dont la courbe passe par $A(1; 2)$ et a pour sommet $B(2; 5)$.

1. Déterminer l'expression de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 8

1. Déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole représentant une fonction trinôme du second degré de forme canonique donnée : ressource 3135
2. Dresser le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré de forme canonique donnée : ressource 3133
3. Indiquer l'extremum d'une fonction trinôme du second degré de forme canonique donnée, sa nature et le nombre pour lequel il est atteint : ressource 3138
4. Déterminer l'axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction trinôme du second degré de forme canonique donnée : ressource 3132
5. Déterminer le nombre d'antécédents d'un nombre par une fonction trinôme du second degré suivant les valeurs de ce nombre : ressource 2349