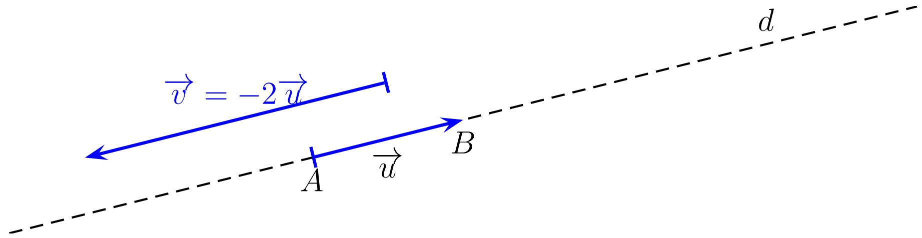
Chapitre 13 : Équations de droites. Systèmes

I Vecteurs directeurs d'une droite

Définition
Soient d une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d s'il existe des points A et B de d tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque

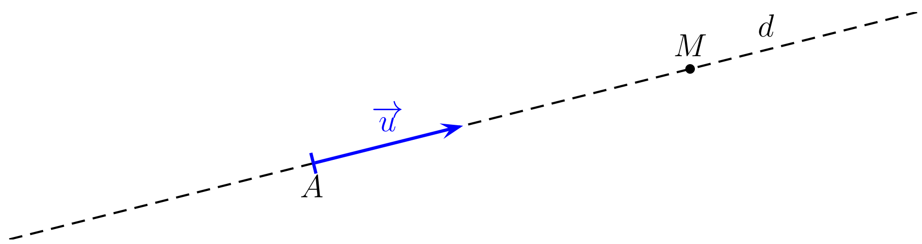
1. Si A et B sont deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
2. Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul qui a la même direction que la droite.
3. Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
   Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, alors les vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$, c'est-à-dire les vecteurs $k\overrightarrow{u}$ où k est un réel non nul.



Exercice 1
On donne $A(-2;1)$ et $B(4;0)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

Remarque
Une droite est entièrement déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.
Plus précisément, soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
La droite d passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} M \in d \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \end{aligned}$$



Propriété
Soient d_1 et d_2 deux droites.
Soient $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de d_1, et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de d_2.
Alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

Remarque
Il s'ensuit que d_1 et d_2 sont sécantes ssi les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 2 (étudier si des droites sont parallèles)
Soient d_1, d_2, d_3 des droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}(2;-1)$, $\overrightarrow{u_2}(4;6)$, et $\overrightarrow{u_3}(-6;3)$.

II Équations cartésiennes de droites

Dans tout ce paragraphe, on se place dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan.

Rappel (chapitre sur les vecteurs)

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et se note $\det(\vec{u}\,; \vec{v})$.

Définition

Une équation de droite est une égalité sur les coordonnées $(x; y)$ d'un point M qui caractérise l'appartenance du point M à la droite :

— lorsque les coordonnées de M vérifient l'équation, le point M est sur la droite,

— lorsque les coordonnées de M ne vérifient pas l'équation, M n'est pas sur la droite.

Théorème

On se place dans un repère du plan.

1. Toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, et c sont des réels, et $(a; b) \neq (0; 0)$.
   Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est alors un vecteur directeur de la droite d.
   On dit que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite d.
2. Réciproquement, si a, b et c sont des réels et $(a; b) \neq (0; 0)$, alors $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite.

Démonstration

1. Soient $A(x_A; y_A)$ un point, et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur non nul (donc $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$).

   On note $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
   Soit $M(x; y)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\beta}_{a} x + \underbrace{(-\alpha)}_{b} y + \underbrace{(\alpha y_A - \beta x_A)}_{c} = 0 \end{aligned}$$

   On reconnaît la forme $ax + by + c = 0$, et comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a bien $(a; b) \neq (0; 0)$.
   De plus, le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est bien un vecteur directeur de d.
2. Réciproquement, considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
   $\mathscr{E}$ est toujours non vide :
   — si $a \neq 0$, $M_0\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right) \in \mathscr{E}$,
   — sinon, $b \neq 0$, et $M_0\left(0; -\dfrac{c}{b}\right) \in \mathscr{E}$.
   Considérons un point $M_0(x_0; y_0) \in \mathscr{E}$.
   On va montrer que $\mathscr{E}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (non nul par hypothèse).
   Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Comme $M_0 \in \mathscr{E}$, on a $ax_0 + by_0 + c = 0$ $(*)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \text{ (en soustrayant la relation } *) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{(critère de colinéarité)} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{E}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. □

Exercice 3 (étudier si un point appartient à une droite)
Soit d la droite d'équation $2x + y + 5 = 0$.

1. Étudier si le point $A(3;4)$ appartient à d.
2. Étudier si le point $B(-3;1)$ appartient à d.
3. Déterminer les coordonnées du point C de la droite d dont l'ordonnée vaut 7.

Propriété (équation réduite)
L'équation d'une droite peut toujours s'écrire de l'une des deux façons suivantes, appelée équation réduite :
- $y = mx + p$ pour les droites non parallèles à (Oy).
  m est appelé le coefficient directeur (ou la pente), p est l'ordonnée à l'origine.
- $x = k$ pour les droites parallèles à (Oy).

Exercice 4 (Deux méthodes pour déterminer une équation de droite)
Soient $A(1;3)$ et $B(3;7)$. Déterminer une équation de la droite (AB).

Propriété (vecteur directeur)
1. La droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
2. La droite d'équation $y = mx + p$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
3. La droite d'équation $x = k$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque
1. Les droites non parallèles à (Oy) sont les courbes représentatives des fonctions affines $f(x) = mx + p$.
2. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ne sont pas des représentations graphiques de fonctions. Elles n'ont pas de coefficient directeur (pente), ni d'ordonnée à l'origine.
3. Les droites parallèles à l'axe des abscisses ont une équation du type $y = k$ $(k \in \mathbb{R})$. Elle représentent les fonctions constantes.
   C'est un cas particulier de droite non parallèle à (Oy).

Exercice 5 (vecteur directeur et équation réduite – corrigé)
Déterminer l'équation réduite et donner un vecteur directeur des droites suivantes :
1. d_1 d'équation $x - 3y + 6 = 0$.
2. d_2 d'équation $6x + 24 = 0$.
3. d_3 d'équation $2y + 6 = 0$.

Exercice 6 (tracer une droite)
Tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 précédentes.

III Coefficient directeur et parallélisme de droites

Propriété (Calcul du coefficient directeur à partir de deux points)
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'abscisses différentes ($x_A \neq x_B$).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Propriété (Autre méthode pour déterminer l'équation d'une droite)
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$ (de sorte que la droite (AB) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées).
La droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$.

1. Calcul du coefficient directeur m :
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
2. Calcul de l'ordonnée à l'origine p :
On remplace x et y dans l'équation $y = mx + p$ avec les coordonnées d'un point de la droite (AB), donc A ou B.

Exercice 7
On donne $A(-2; 3)$ et $B(4; 0)$. Déterminer une équation de la droite (AB).

Théorème
1. Deux droites parallèles à (Oy) sont parallèles entre elles.
2. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement elles ont le même coefficient directeur.
Autrement dit :
Si $\mathscr{D}$ a pour équation $y = mx + p$ et $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$ alors,
$$\mathscr{D} \ // \ \mathscr{D}' \Leftrightarrow m = m'.$$

Exercice 8
Notons $d_1 : y = 3x - 5$, $d_2 : x = 7$, $d_3 : y = -2$, $d_4 : 6x - 2y + 3 = 0$.
Donner un vecteur directeur pour chacune de ces droites.
Montrer de deux façons que $d_1 // d_4$.

IV Systèmes d'équations de droites

Exemple :
$$\begin{cases} x - y = 2 & (d_1) \\ x + 2y = 3 & (d_2) \end{cases}$$
Résoudre un tel système consiste à trouver les réels x et y qui vérifient à la fois ces deux équations de droites, ce qui revient à déterminer les coordonnées des points $M(x; y)$ qui appartiennent aux deux droites à la fois.

Théorème (nombre de solutions possibles)
Un système formé de deux équations de droites peut avoir :
- 1 solution si les deux droites sont sécantes,
- aucune solution si les deux droites sont strictement parallèles (parallèles distinctes),
- une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.

IV.1 Méthodes de résolution

IV.1.a Méthode par substitution

Exercice 9

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=3 \end{array}\right.$

On exprime une inconnue (par exemple x en fonction de y), et on la remplace dans l'autre équation. Ici,

$$\left\{\begin{array}{c} x=y+2 \\ (y+2)+2y=3 \end{array}\right.$$

On trouve y dans la 2e équation, puis x.

$\left\{\begin{array}{c} x=y+2 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Le système a une seule solution : le couple $\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Interprétation : les droites d'équation respective $xy=2$ et $x+2y=3$ se coupent au point $A\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

IV.1.b Méthode par combinaison linéaire

Exercice 10

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=-1 \\ x-2y=-4 \end{array}\right.$

On va faire disparaître une inconnue d'une équation en soustrayant les deux équations.
Pour faire disparaître x, on multiplie par 2 la seconde équation de sorte que x ait le même coefficient dans les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y=-1 & L_1 \\ 2x-4y=-8 & L_2 \end{array}\right.$$

On soustrait membre à membre L_1-L_2,

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3y-(-4y) & = & -1-(-8) & L_1-L_2 \\ x & = & -4+2y & L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7y & = & 7 \\ x & = & -4+2y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$$

Le couple solution est $(-2;1)$.