Chapitre 9 : Fonctions exponentielles.
Fonction logarithme décimal.

I Fonctions exponentielles

Soit a un réel strictement positif, $a > 0$. On connaît les nombres a^n avec n entier relatif (positif ou négatif).
Par exemple, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.
On généralise la notion d'exposant aux nombres réels.

Définition
On admet que, pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel strictement positif a^x, qui se lit a puissance x.
La fonction qui à tout réel x associe le nombre a^x est appelée fonction exponentielle de base a.

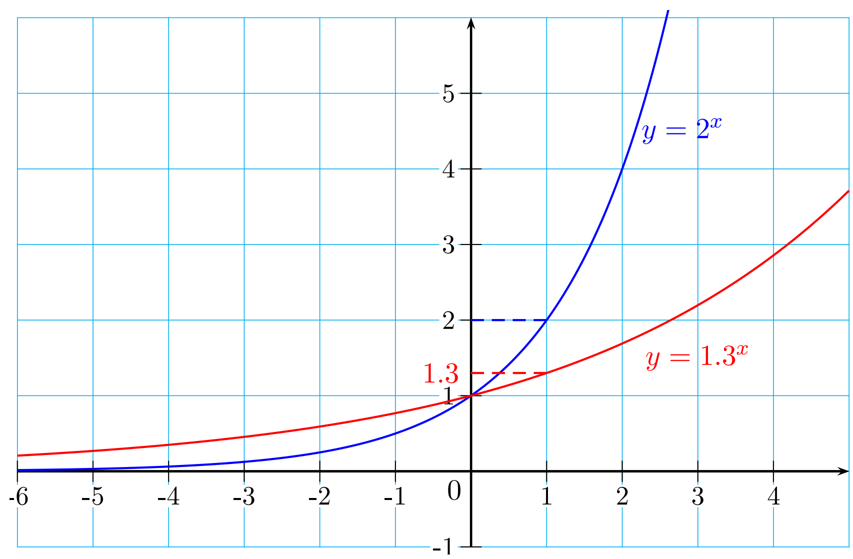
Remarque
Lorsque $a = 1$, on obtient la fonction constante égale à 1.
$\sqrt{a} = a^{1/2}$

Remarque

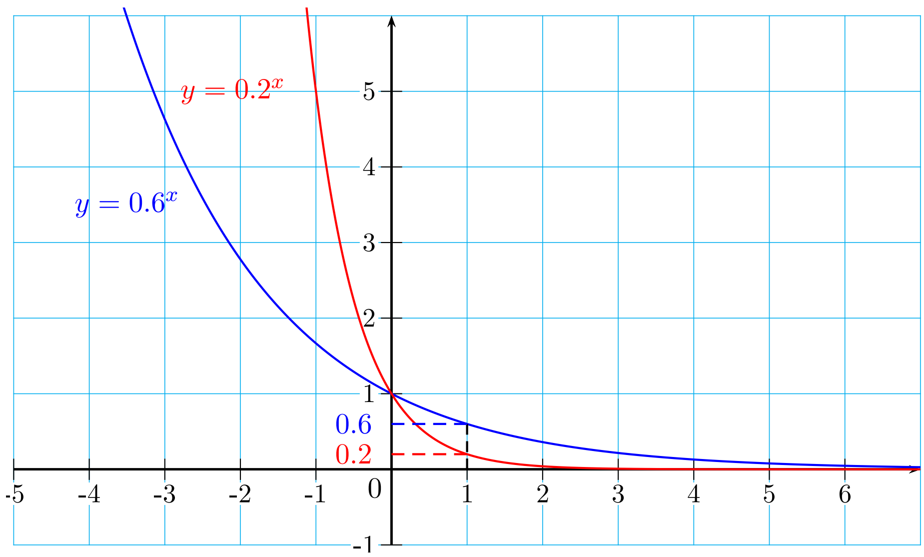
1. Pour tout x réel, $a^x > 0$: une exponentielle est toujours strictement positive.
2. Pour tout $a > 0$, $a^0 = 1$. Les courbes des foncions exponentielles de base a passent toutes par le point $J(0;1)$.

Propriété (sens de variation)
Soit $a > 0$.

1. Lorsque $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.
2. Lorsque $0 < a < 1$, la fonctioin $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante.



Fonctions exponentielles de base a, $a > 1$.



Fonctions exponentielles de base a, $0 < a < 1$.

Propriété
Soient $a > 0$ et k un réel non nul.

1. Si $k > 0$, alors la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation sur $\mathbb{R}$ que la fonction $x \mapsto a^x$.
2. Si $k < 0$, alors la fonction $x \mapsto k \times a^x$ est de sens de variation contraire à $x \mapsto a^x$.

Exemple :

1. $f(x) = 2,7 \times 0,9^x$.
   Comme $0 < 0,9 < 1$, la fonction $x \mapsto 0,9^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   En multipliant par $2,7 > 0$, le sens de variation est conservé.
   La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = -15 \times 4^x$.
   Comme $4 > 1$, la fonction $x \mapsto 4^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   En mutipliant par $-15 < 0$, on change le sens de variation.
   Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
Lien avec les suites géométriques : la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ est le prolongement de la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = a^n$.
La suite est représentée par des points situés sur la courbe de la fonction exponentielle de base a $f(x) = a^x$.

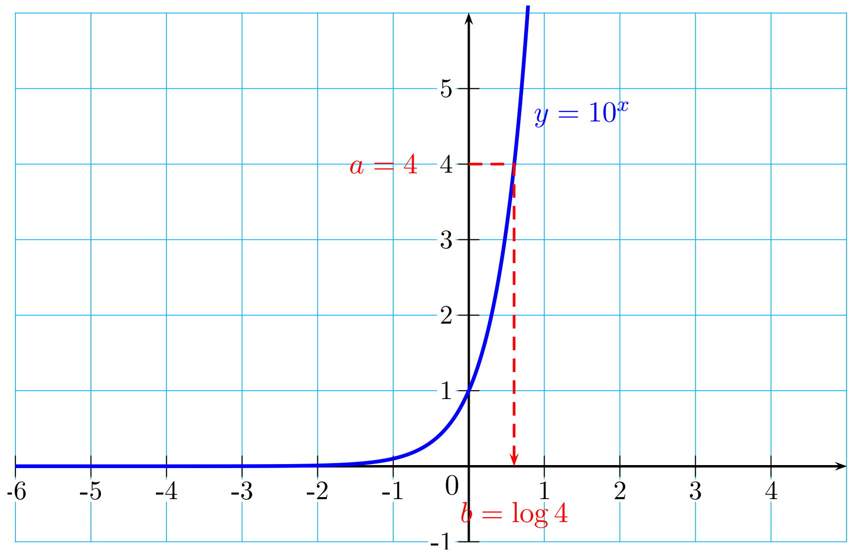
Les propriétés sur les exposants entiers se généralisent à tous les exposants réels.

Propriété
Soient a, b des réels strictement positifs, et x et y des réels.

1. $1^x = 1$.
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
5. $a^x b^x = (ab)^x$
6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
7. $(a^x)^y = a^{x \times y}$,

II Fonction logarithme décimal $x \mapsto \log(x)$

Soit $a > 0$. L'équation $10^x = a$ admet une unique solution réelle.



Fonction exponentielle de base 10, $f(x) = 10^x$.

Définition
Le logarithme décimal d'un nombre a strictement positif est le nombre réel b tel que $a = 10^b$. Il est noté $\log(a)$, ou $\log a$.
On retiendra l'équivalence suivante :
Pour tout $a > 0$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$\log a = b \quad \text{ssi} \quad a = 10^b$$

Remarque
En particulier,

1. Comme $10^0 = 1$, on a $\log(1) = 0$.
2. Comme $10^1 = 10$, on a $\log(10) = 1$

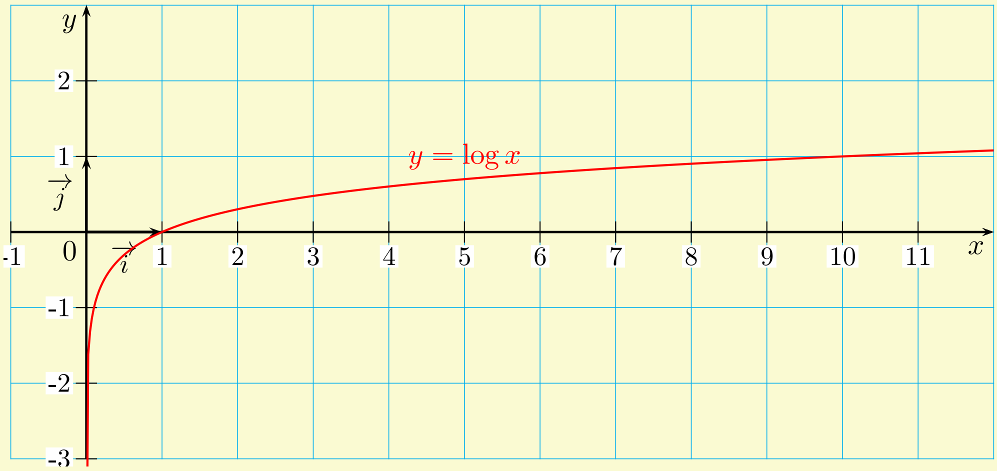
Propriété
Pour tout nombre $a > 0$, $b = \log a$ ssi $a = 10^b$.

Remarque

1. La fonction log est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Pour tout nombre réel x, $\log(10^x) = x$.

Propriété

1. Courbe représentative



2. La fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$\log(x)$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. Signe de la fonction log :

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

4. Pour tous a et b appartenant à $]0; +\infty[$,
   — $\log a = \log b$ ssi $a = b$;
   — $\log a < \log b$ ssi $a < b$;
   — $\log a = 0$ ssi $a = 1$;
   — $\log a < 0$ ssi $a < 1$, et $\log a > 0$ ssi $a > 1$.

Propriété
Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout réel x,

1. $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$,
2. $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$,
3. $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
4. $\log(a^x) = x\log(a)$

La fonction log transforme un produit en somme.

III Exercices résolus

Exercice 1 (équation $\log x = k$)
Résoudre $2\log x - 1 = 7$. On isole le logarithme.

$$\begin{array}{rcl} 2\log x - 1 & = & 7 \\ 2\log x & = & 8 \\ \log x & = & 4 \\ x & = & 10^4 \\ x & = & 10\ 000 \end{array}$$

Exercice 2 (équation $a^x = b$)
Résoudre $2^x = 31$.

$$\begin{array}{rcl} 2^x & = & 31 \\ \log(2^x) & = & \log 31 \\ x\log 2 & = & \log 31 \\ x & = & \dfrac{\log 31}{\log 2} \end{array}$$

Exercice 3 (inéquation $a^x > b$)
Résoudre $0,7^x > 3$.

$$\begin{array}{rcl} 0,7^x & > & 3 \\ \log(0,7^x) & > & \log 3 \\ x\log 0,7 & > & \log 3 \\ x & < & \dfrac{\log 3}{\log 0,7} \end{array}$$

Attention ici : comme $0 < 0,7 < 1$, $\log 0,7 < 0$, il faut donc changer le sens de l'inégalité lorsqu'on divise par $\log 0,7$.