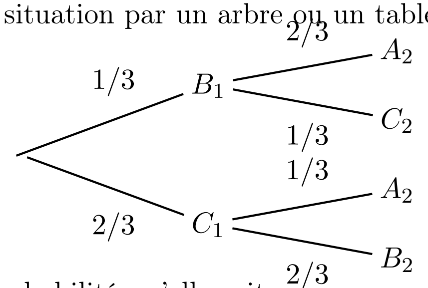
Correction du dm3

Exercice 1 (64 page 293)

Une coccinelle se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC direct. Elle part du sommet A. Son déplacement se fait 2 fois sur 3 dans le sens des aiguilles d'une montre. On s'intéresse aux deux premiers déplacements.

1. Représenter la situation par un arbre ou un tableau.



2. Quelle est la probabilité qu'elle soit revenue au point de départ après deux déplacements ?
   La probabilité que la coccinelle soit revenue à son point de départ après deux déplacements est $P(A_2)$.
   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(A_2) = P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

   $\boxed{\text{La probabilité qu'elle soit revenue en } A \text{ après deux déplacmeents est de } \frac{4}{9}.}$

Exercice 2

En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x-2}$ est dérivable en 5, et déterminer $f'(5)$.

Soit $h \neq 0$.

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{3}{5+h-2} - 1\right) = \frac{3-(h+3)}{h(h+3)} = \frac{-1}{h+3}.$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = -\frac{1}{3}$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 5 et } f'(5) = -\frac{1}{3}.}$

Exercice 3

La tangente à la courbe de la fonction carré au point $A(2; 4)$ passe-t-elle par le point $K(-1; -8)$?

On pose $f(x) = x^2$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
Soit T cette tangente au point d'abscisse 2.
Elle a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.
Donc T a pour équation $y = 4x - 4$.
Or, $4 \times (-1) - 4 = -8$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } K \text{ vérifient l'équation de la droite : } K \in T.}$

Exercice 4 (183 page 67 – les fourmis)

On note t_1 le temps de trajet aller, et t_2 le temps de trajet retour pour la fourmi ravitailleuse.
La durée totale est $t = t_1 + t_2$.
On note v_1 la vitesse de la fourmi ravitailleuse, et v_2 celle de la fourmi de tête ($v_1 > v_2$).
$\mathit{vitesse} = \frac{\mathit{distance}}{\mathit{temps}}$, donc $\mathit{distance} = \mathit{temps} \times \mathit{vitesse}$.
Durant le trajet aller qui dure t_1 les fourmis vont dans le même sens, et la soustraction des distances fait 50 : $50 = t_1v_1 - t_1v_2 = t_1(v_1 - v_2)$.
Ainsi, $t_1 = \frac{50}{v_1 - v_2}$.
Durant le trajet retour qui dure t_2 les fourmis vont en sens contraire, et la somme des distances fait 50 :
$50 = t_2v_1 + t_2v_2 = t_2(v_1 + v_2)$. Ainsi, $t_2 = \frac{50}{v_1 + v_2}$.
Durant toute la durée, la colonne avance de 50 à la vitesse v_2, soit $t = \frac{50}{v_2}$.
Ainsi, $t = t_1 + t_2$, soit

$$\frac{50}{v_2} = \frac{50}{v_1 - v_2} + \frac{50}{v_1 + v_2}$$

Cette équation revient à $\frac{1}{v_2} = \frac{v_1 + v_2 + v_1 - v_2}{v_1^2 - v_2^2}$, puis, par produit en croix, $2v_1v_2 = v_1^2 - v_2^2$.
$v_1^2 - 2v_1v_2 - v_2^2 = 0$, soit $(v_1 - v_2)^2 - 2v_2^2 = 0$, donc $(v_1 - (1+\sqrt{2})v_2)(v_1 + (-1+\sqrt{2})v_2) = 0$.
Or, $-1 + \sqrt{2} > 0$, et donc $(v_1 + (-1+\sqrt{2})v_2) > 0$ (non nul).
Ainsi, on obtient $v_1 = (1+\sqrt{2})v_2$.
La distance d parcourue par la fourmi ravitailleuse est alors donnée par :
$d = v_1 \times t = (1+\sqrt{2})v_2 \times \frac{50}{v_2} = (1+\sqrt{2}) \times 50 \approx 120,71$.

$\boxed{\text{La fourmi ravitailleuse a parcouru environ 120,71 cm.}}$