

Term STI. Spécialité

Équations différentielles

Introduction

De nombreux phénomènes scientifiques peuvent être modélisés par une relation entre une fonction f et sa dérivée f' .

Rechercher cette fonction f revient à résoudre une équation différentielle.

Exemples :

- On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t (en secondes) vérifie, pour tout réel $t \geq 0$ la relation : $N'(t) = 0,2N(t)$.
- Le carbone 14, noté ^{14}C , est un isotope radioactif qui sert à la datation en archéologie et en géologie. La méthode repose sur le fait que tout au long de leur vie, les organismes vivants assimilent du ^{14}C et, quand ils meurent, le ^{14}C qu'ils ont accumulé commence à se désintégrer : le nombre d'atomes décroît alors avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On admet que l'évolution du ^{14}C dans un échantillon de matière organique est modélisée par une fonction N dérivable sur $[0; +\infty[$ et qui vérifie : $N'(t) + 0,121N(t) = 0$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t , exprimé en milliers d'années.

I Généralités

Définition

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue (souvent notée y) est une fonction, et qui donne une relation entre y , sa dérivée y' (éventuellement y'' , des dérivées successives), et la variable x sur un intervalle donné.
- Une fonction qui vérifie l'équation différentielle est une solution de cette équation.
- Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation.

Exercice 1

Soit l'équation différentielle suivante, d'inconnue y : $y'(x) = 4x + 1$.

Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 + x + 3$ est une solution de cette équation différentielle.

Exemple :

1. $2y - xy' = 0$ est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, à coefficients non constants.
2. $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ est une équation différentielle non linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants. La notation $\frac{dy}{dx}$ est souvent utilisée en physique.
3. $y'' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du 2^d ordre à coefficients constants.

Exercice 2

Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 4$.

$F(x) = 2e^{-x} + 4$; $G(x) = 2e^{-2x} + 2$; $H(x) = e^{-2x} + 2$.

Exercice 3

Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4x$.

$$f(x) = 2e^{-x} + 4x + 4; \quad g(x) = 2e^{-2x} - 4x - 4; \quad h(x) = 2e^{-x} + 4x - 4$$

Exercice 4

Trouver une solution des équations différentielles suivantes.

1. $y' = 0$
2. $y' = y$
3. $y' + y = 7x + 7$

Exercice 5

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = e^{-x}$.

II Équations différentielles $y' = ay + b$, avec a et b réels

Théorème (Équation $y' = ay$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles.

1. $y' = -4y$
2. $2y' - y = 0$

Remarque

Pour chaque équation différentielle, il y a une infinité de solutions (autant que de réels k). Si l'on impose une condition initiale $f(x_0) = y_0$, alors la valeur de k est fixée et l'équation n'a qu'une seule solution.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $y(0) = -1$.

Théorème (Équation $y' = ay + b$)

Soient a et b deux réels. Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque

Come précédemment, l'équation $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions. Avec en plus une condition initiale $y(x_0)$ donnée, elle a une unique solution vérifiant la condition initiale.

Exercice 8

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + 5$
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + y = -2$ qui vérifie $y(0) = 5$.