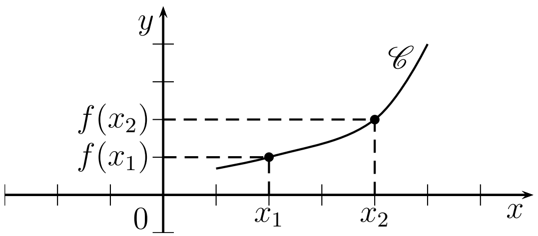
Chapitre 10 : Variations des fonctions et extrema

I Fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle

I.1 Fonction croissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

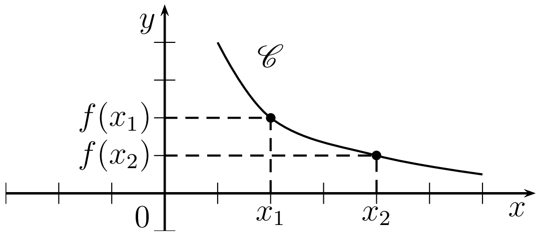


Remarque
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).

I.2 Fonction décroissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Exercice 1 (corrigé)
On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les images par f de -3, -1, 0, 2, et 5.
   $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $f(0) = 0^2 = 0$; $f(2) = 2^2 = 4$, et $f(5) = 5^2 = 25$.

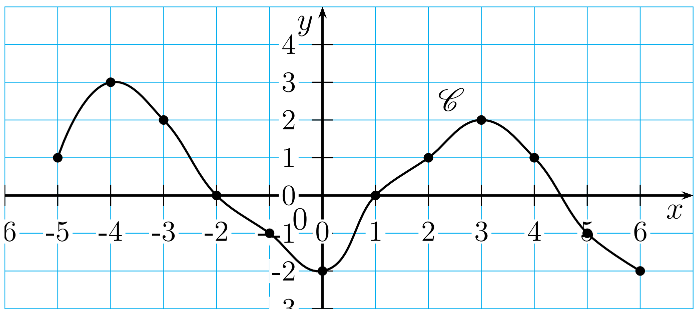
2. En donnant un contre-exemple, montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
   On a $-3 < 2$, et $f(-3) > f(2)$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer de même que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
   On a $0 < 2$, et $f(0) < f(2)$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (corrigé)
Montrer que la fonction affine f définie par $f(x) = 3x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Soient a, b deux nombres réels.
Supposons que $a < b$.
$f(a) - f(b) = (3a+1) - (3b+1) = 3a - 3b = 3(a-b)$.
Comme $a < b$, on a $a - b < 0$.
En multipliant par 3>0, le sens de l'inégalité est conservé. Donc $3(a-b) < 0$.
Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.
On a montré que pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II Tableau de variations d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Exemple : voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 6]$.



Le tableau de variation de f est :

x	-5		-4		0		3		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	2	↘	-2

III Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
   $$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
   Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
   $$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
   Le minimum de f sur I est $f(a)$.

Exemple : Sur l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5; 6]$ est 3, il est atteint en -4.
Le minimum de f est -2, il est atteint en 0 et en 6.

Exercice 3 (corrigé)
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		-1		3		5
$f(x)$	4	↘	1	↗	2	↘	-1

De plus, l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4.

1. Indiquer le maximum de f sur$[-3;5]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
   Le maximum de f est 4. Il est atteint en -3 (ce qui signifie lorsque $x=-3$).

2. Comparer $f(-2,5)$ et $f(-2,4)$. Justifier.
   $-2,5 < -2,4$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3;1]$ qui contient $-2,5$ et $-2,4$.
   Donc $f(-2,5) \leqslant f(-2,4)$.

3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
   Lorsque $x \in [-3;-1]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

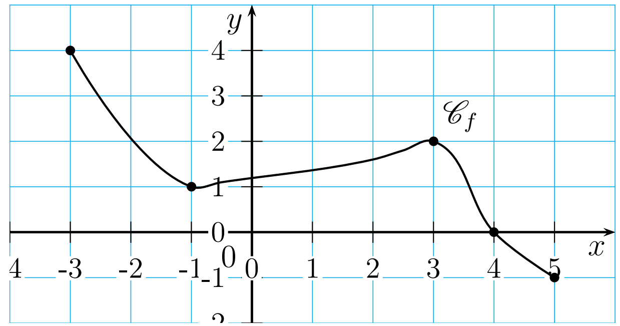
4. Donner un encadrement de $f(-2)$ et de $f(3,6)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?
   $1 \leqslant f(-2) \leqslant 4$, et $-1 \leqslant f(3,6) \leqslant 2$.
   Cela ne suffit pas pour comparer ces deux images (-2 et 3,6 ne sont pas dans un même intervalle où f est croissante ou décroissante.

5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

   (a) "Pour tout $x \in [-3;5]$, $f(x) \geqslant -2$."
   Vrai, car le minimum de f sur $[-3;5]$ est -1.
   Donc pour tout $x \in [-3;5]$, $f(x) \geqslant -1 > -2$.

   (b) "Il existe au moins un réel x dans l'intervalle $[-3;5]$ tel que $f(x) > x$."
   Vrai : $x=-3$ convient. En effet, $f(-3) = -2 > -3$.

6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec toutes les données de l'énoncé.
   En plus du tableau de variation, on sait que l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4, donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $(4;0)$.

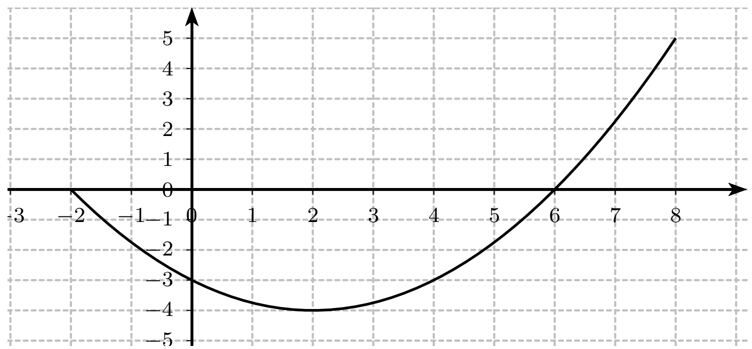


7. Dresser le tableau de signe de f.

x	-3		4		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	

En effet, $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-3;4[$, $f(x) < 0$ pour tout $x \in]4;5]$, et $f(x) = 0$ ssi $x = 4$.

Exercice 4 (corrigé)
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
   f est définie sur l'intervalle $[-2;8]$.
2. Lire $f(4)$ et $f(6)$.
   $f(4) = -3$ et $f(6) = 0$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

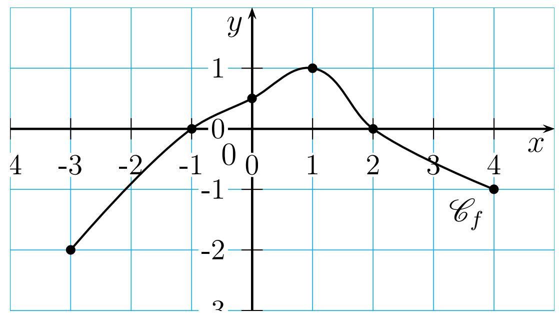
x	-2		2		8
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

4. Donner le maximum de f sur son ensemble de définition, et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.
   Le maximum de f est 5, il est atteint lorsque $x = 8$.
5. Donner le minimum de f et préciser en quelle valeur il est atteint.
   Le minimum de f est -4, il est atteint lorsque $x = 2$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à -3. Les solutions sont 0 et 4.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement inférieure à -3. L'ensemble solution est l'intervalle $]0; 4[$.

Exercice 5 (corrigé)
Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3		1		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

1. Comparer $f(2,5)$ et $f(3,4)$. Justifier.
   $2,5 < 3,4$, et f est décroissante sur l'intervalle $[1; 4]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(2,5) \geqslant f(3,4)$.
2. Comparer $f(-0,4)$ et $f(-0,1)$. Justifer. $-0,4 < -0,1$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3; 1]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(-0,4) \leqslant f(-0,1)$.
3. On admet de plus que f vérifie les conditions suivantes :
   Les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
   Tracer une courbe de fonction compatible avec toutes les données de l'énoncé.
   Comme les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, la courbe passe par les points de coordonnées $(-1; 0)$, et$(2; 0)$.
   Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$, la courbe passe aussi par le point $(0; \dfrac{1}{2})$.



IV Variations des fonctions de référence

affines, carré, inverse, cube racine.