Correction du contrôle n°7
Sujet 1

Exercice 1 (1 point)

Donner le tableau de variation de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

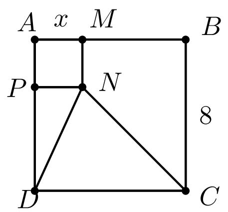
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 2 (4 points)

1. Résoudre les équations suivantes (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $x^2 = -1$. $\boxed{\text{Un carré est toujours positif, il n'y a pas de solution.}}$
   (b) $x^2 = 7$ $\boxed{S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}.}$
2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2 (aucune justification n'est demandée) :
   (a) si $-3 < x < -2$, alors $4 < x^2 < 9$.
   (b) si $-3 \leqslant x \leqslant 2$, alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.
   (c) si $5 \leqslant x \leqslant 8$, alors $25 \leqslant x^2 \leqslant 64$.

Exercice 3 (5 points)

Soit $ABCD$ un carré de côté 8 cm.
Soit M un point de $[AB]$.
Les points N et P sont définis tels que $AMNP$ soit un carré avec $P \in [AD]$.



On note x la longueur AM en cm, $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ (en cm^2), et $g(x)$ l'aire du triangle DNC (en cm^2).

1. Donner l'intervalle des valeurs possibles pour x.
   $\boxed{\text{Comme } M \in [AB], \text{ on a } x \in [0; 8].}$
2. On cherche désormais la position du point M pour que l'aire du carré $AMNP$ soit égale à l'aire du triangle DNC.
   (a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   $\boxed{f(x) \text{ est l'aire du carré } AMNP \text{ de côté } x, \text{ donc } f(x) = x^2.}$
   (b) Montrer que $g(x) = 32 - 4x$.
   La hauteur issue de N dans le triangle DNC mesure $8 - x$.
   $g(x) = Aire(DNC) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
   $\boxed{g(x) = \dfrac{8(8-x)}{2} = 4 \times (8 - x) = 32 - 4x.}$
   (c) Montrer que $f(x) - g(x) = (x - 4)(x + 8)$.
   Donc $f(x) - g(x) = x^2 - (32 - 4x) = x^2 + 4x - 32$.
   Par ailleurs, en développant,
   $(x - 4)(x + 8) = x^2 + 8x - 4x - 32 = x^2 + 4x - 32$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) - g(x) = (x - 4)(x + 8).}$
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et répondre au problème.

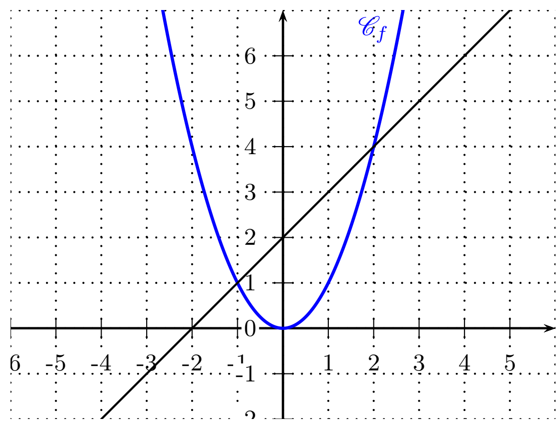
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) \\ f(x) - g(x) & = & 0 \\ (x-4)(x+8) & = & 0 \\ x - 4 = 0 & \text{ou} & x + 8 = 0 \\ x = 4 & \text{ou} & x = -8 \end{array}$$

   D'après le contexte, x est une longueur, et on a vu que $x \in [0; 8]$.
   On retient seulement la solution positive $x = 4$.
   $\boxed{\text{Les deux aires sont égales lorsque } AM = 4 \text{ cm, c'est à dire lorsque } M \text{ est au milieu du segment } [AB].}$

Exercice 4 (6 points)

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On s'intéresse à l'inéquation $x^2 > x + 2$.

1. Tracer la droite d'équation $y = x + 2$ sur le même graphique que la courbe de la fonction carré donnée ci-dessous.



Il suffit de déterminer les coordonnées de deux points :

x	0	3
$x+2$	2	5

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 > x+2$. Expliquer la méthode.

   Les solutions sont les abscisses des points où la courbe de f est au-dessus de la droite.
   $S =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

3. Montrer que $x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

   En développant,
   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = x^2 - x - 2$.

4. En déduire que $x^2 > x+2$ équivaut à $(x-2)(x+1) > 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &> x+2 \\ x^2 - x - 2 &> 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &> 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &> 0 \\ \left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \times \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) &> 0 \\ (x-2)(x+1) &> 0 \end{aligned}$$

   Donc $x^2 > x+2$ équivaut à $(x-2)(x+1) > 0$.

5. Retrouver par le calcul l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 > x+2$.
   On s'est ramené à résoudre l'inéquation $(x-2)(x+1) > 0$.
   Valeurs clés :
   $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
   $x + 1 = 0$ donne $x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On retrouve $S =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 5 (4 points)

À l'occasion de la fête du cinéma, durant quatre jours, un cinéma propose des offres aux tarifs suivants :

- 5,50 euros la place de cinéma jusqu'à 5 places achetées,
- pour au moins 6 places achetées, un forfait de 5 euros puis 4 euros la place de cinéma.

1. Calculer le coût total à débourser si l'on compte voir 3 films, puis 7 films.
   $5,5 \times 3 = 16,5$.
   $5 + 7 \times 4 = 33$.

   La dépense est de 16,5 euros pour 3 films et de 33 euros pour 7 films.

2. Compléter la fonction ci-contre, en langage Python, qui renvoie la dépense totale en fonction du nombre de places achetées.

```
def depense(n):
    if n<=5
        d=5,5*n
    else :
        d=5+4*n
    return(d)
```

3. Écrire une nouvelle fonction `coutmoyen` qui, en fonction du nombres de places, renvoie le prix moyen de la place de cinéma durant la fête du cinéma.
   Il suffit d'ajouter, après la fonction précédente,

```
def coutmoyen(n):
    return(depense(n)/n)
```

4. Que renvoie `coutmoyen(10)` ? Justifier.
   Pour $n = 10$,on a $d = 5 + 4 \times 10 = 45$. La dépense est donc de 45 euros.
   $\frac{45}{10} = 4,5$.

   Dans ce cas, le prix moyen d'une place est de 4,5 euros.

Exercice 6 (bonus, 2 points)

1. Écrire une fonction `max2` en Python qui renvoie le plus grand nombre parmi deux nombres a et b.

```
def max2(a,b) :
    if a<=b :
        return(b)
    else :
         return(a)
```

2. Écrire une fonction `max3` en Python qui renvoie le plus grand nombre parmi trois nombres a, b et c.

```
def max3(a,b,c) :
    u=max2(a,b)
    return(max2(u,c))
```

Sujet 2

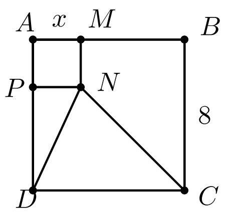
Exercice 7 (1 point)
Donner, suivant les valeurs du nombre réel a, le nombre de solutions de l'équation $x^2 = a$.

1. Lorsque $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions (qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$).
2. Lorsque $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution (qui est 0).
3. Lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle.

Exercice 8 (4 points)

1. Résoudre les équations suivantes (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $x^2 = 110$ $\boxed{S = \{\sqrt{110}; -\sqrt{110}.}$
   (b) $x^2 + 36 = 0$ $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution.}}$
2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2 (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $-8 < x < 3$ $\boxed{0 \leqslant x^2 < 64.}$
   (b) $-3 \leqslant x \leqslant -1$ $\boxed{1 \leqslant x^2 \leqslant 9.}$
   (c) $5 \leqslant x \leqslant 6$ $\boxed{25 \leqslant x^2 \leqslant 36.}$

Exercice 9 (5 points)
Soit $ABCD$ un carré de côté 8 cm.
Soit M un point de $[AB]$.
Les points N et P sont définis tels que $AMNP$ soit un carré avec $P \in [AD]$.



On note x la longueur AM en cm, $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ (en cm^2), et $g(x)$ l'aire du triangle DNC (en cm^2).

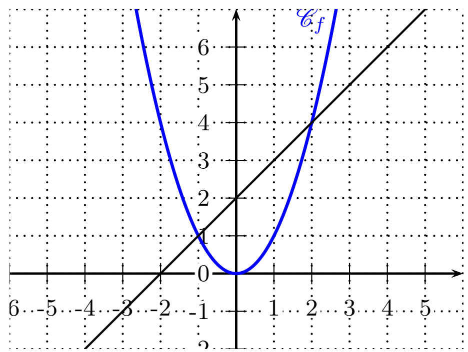
1. Donner l'intervalle des valeurs possibles pour x.
   $\boxed{\text{Comme } M \in [AB], \text{ on a } x \in [0;8].}$
2. On cherche désormais la position du point M pour que l'aire du carré $AMNP$ soit égale à l'aire du triangle DNC.
   (a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   $\boxed{f(x) \text{ est l'aire du carré } AMNP \text{ de côté } x, \text{ donc } f(x) = x^2.}$
   (b) Montrer que $g(x) = 32 - 4x$.
   La hauteur issue de N dans le triangle DNC mesure $8 - x$.
   $g(x) = Aire(DNC) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
   $\boxed{g(x) = \dfrac{8(8-x)}{2} = 4 \times (8-x) = 32 - 4x.}$
   (c) Montrer que $f(x) - g(x) = (x-4)(x+8)$.
   Donc $f(x) - g(x) = x^2 - (32 - 4x) = x^2 + 4x - 32$.
   Par ailleurs, en développant,
   $(x-4)(x+8) = x^2 + 8x - 4x - 32 = x^2 + 4x - 32$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) - g(x) = (x-4)(x+8).}$
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et répondre au problème.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) \\ f(x) - g(x) & = & 0 \\ (x-4)(x+8) & = & 0 \\ x - 4 = 0 & \text{ou} & x + 8 = 0 \\ x = 4 & \text{ou} & x = -8 \end{array}$$

   D'après le contexte, x est une longueur, et on a vu que $x \in [0;8]$.
   On retient seulement la solution positive $x = 4$.
   $\boxed{\text{Les deux aires sont égales lorsque } AM = 4 \text{ cm, c'est à dire lorsque } M \text{ est au milieu du segment } [AB].}$

Exercice 10 (6 points)
On se place dans un repère orthonormé du plan.
On s'intéresse à l'inéquation $x^2 > x + 2$.

1. Tracer la droite d'équation $y = x + 2$ sur le même graphique que la courbe de la fonction carré donnée ci-dessous.



Il suffit de déterminer les coordonnées de deux points :

x	0	3
$x+2$	2	5

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 > x+2$. Expliquer la méthode.

Les solutions sont les abscisses des points où la courbe de f est au-dessus de la droite.
$S =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

3. Montrer que $x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

En développant,
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = x^2 - x - 2$.

4. En déduire que $x^2 > x+2$ équivaut à $(x-2)(x+1) > 0$.

$$\begin{aligned}
x^2 &> x+2 \\
x^2 - x - 2 &> 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &> 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &> 0 \\
\left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \times \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) &> 0 \\
(x-2)(x+1) &> 0
\end{aligned}$$

Donc $x^2 > x+2$ équivaut à $(x-2)(x+1) > 0$.

5. Retrouver par le calcul l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 > x+2$.

On s'est ramené à résoudre l'inéquation $(x-2)(x+1) > 0$.
Valeurs clés :
$x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
$x + 1 = 0$ donne $x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve $S =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 11 (4 points)

À l'occasion de la fête du cinéma, durant quatre jours, un cinéma propose des offres aux tarifs suivants :

— 5,50 euros la place de cinéma jusqu'à 5 places achetées,

— pour au moins 6 places achetées, un forfait de 5 euros puis 4 euros la place de cinéma.

1. Calculer le coût total à débourser si l'on compte voir 3 films, puis 7 films.

$5,5 \times 3 = 16,5$.
$5 + 7 \times 4 = 33$.

La dépense est de 16,5 euros pour 3 films et de 33 euros pour 7 films.

2. Compléter la fonction ci-contre, en langage Python, qui renvoie la dépense totale en fonction du nombre de places achetées.

```
def depense(n):
    if n<=5
        d=5,5*n
    else :
        d=5+4*n
    return(d)
```

3. Écrire une nouvelle fonction `coutmoyen` qui, en fonction du nombres de places, renvoie le prix moyen de la place de cinéma durant la fête du cinéma.

Il suffit d'ajouter, après la fonction précédente,

```
def coutmoyen(n):
    return(depense(n)/n)
```

4. Que renvoie `coutmoyen(10)` ? Justifier.

Pour $n = 10$,on a $d = 5 + 4 \times 10 = 45$. La dépense est donc de 45 euros.
$\frac{45}{10} = 4,5$.

Dans ce cas, le prix moyen d'une place est de 4,5 euros.

Exercice 12 (bonus, 2 points)

1. Écrire une fonction `max2` en Python qui renvoie le plus grand nombre parmi deux nombres a et b.

```
def max2(a,b) :
    if a<=b :
        return(b)
    else :
         return(a)
```

2. Écrire une fonction `max3` en Python qui renvoie le plus grand nombre parmi trois nombres a, b et c.

```
def max3(a,b,c) :
    u=max2(a,b)
    return(max2(u,c))
```