Correction de l'interrogation n° 1
Sujet 1

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - 2n + 5.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = u_0 - 2 \times 0 + 5 = 4 + 5 = 9$.
   $u_2 = u_1 - 2 \times 1 + 5 = 12$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = -n^2 + 6n + 4.$$

Initialisation
On teste l'égalité pour $n = 0$.
On a $u_0 = 4$.
Par ailleurs $-0^2 + 6 \times 0 + 4 = 4$.
On a donc bien $u_0 = -0^2 + 6 \times 0 + 4$.
Hérédité
Soit un entier $k \geqslant 0$.
Supposons que $u_k = -k^2 + 6k + 4$.
On veut montrer que $u_{k+1} = -(k+1)^2 + 6(k+1) + 4$.
On a $u_{k+1} = u_k - 2k + 5 = -k^2 + 6k + 4 - 2k + 5 = -k^2 + 4k + 9$.
Par ailleurs, en développant,
$-(k+1)^2 + 6(k+1) + 4 = -(k^2 + 2k + 1) + 6k + 6 + 4 = -k^2 + 4k + 9 = u_{k+1}$.
On a donc bien $u_{k+1} = -(k+1)^2 + 6(k+1) + 4$.
La propriété est héréditaire.
Conclusion
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + 6n + 4$.

Correction du sujet 2

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 7$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = -\frac{3}{4} \times 6 + 7 = \frac{5}{2}$. $\qquad u_2 = -\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} + 7 = \frac{41}{8}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 4.$$

Initialisation
On teste l'égalité pour $n = 0$.
$u_0 = 6$.
Par ailleurs, $2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^0 + 4 = 2 \times 1 + 4 = 6$.
Donc $u_0 = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^0 + 4$.
Hérédité
Soit un entier $k \geqslant 0$.
Supposons que $u_k = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^k + 4$.
Montrons que $u_{k+1} = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1} + 4$.
On a $u_k = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^k + 4$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= -\frac{3}{4}u_k + 7 \\
&= -\frac{3}{4} \times \left[2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^k + 4\right] + 7 \\
&= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1} - \frac{3}{4} \times 4 + 7 \\
&= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1} - 3 + 7 \\
&= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1} + 4
\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.
Conclusion
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 4$.