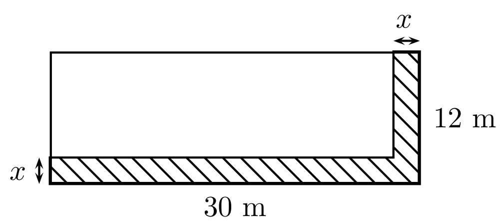
Première S Samedi 07 Octobre 2017

Contrôle de mathématiques n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1 (10 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
2. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
3. Dresser le tableau de variation de f. Justifier.
4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$. Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite (d).
5. Pour tout réel p, on considère la droite $(\mathcal{D}_p)$ d'équation $y = 2x + p$.
   Déterminer algébriquement le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{D}_p)$ et $\mathcal{P}$ suivant les valeurs de p.

Exercice 2 (5 points)
Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. On souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2.
   Montrer que cela se traduit par l'inéquation
   $$x^2 - 42x + 80 \geqslant 0.$$
2. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Exercice 3 (5 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$.
2. $\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{1}{3(x-4)} + \dfrac{1}{2} = 0$.

Indications :
1. On pourra poser $u = x^2$.
2. On pourra montrer que l'équation, lorsqu'elle est définie, revient à $3x^2 - 19x + 26 = 0$.

Exercice 4 (Bonus, 2 points)

Les extrémités A et B d'une ficelle sont fixées à deux clous distants de 65 cm.
On forme avec cette ficelle un triangle comme l'indique la figure ci-contre.

1. Peut-on former un triangle rectangle dans le cas où la longueur de la ficelle est 85 cm ?
2. Est-il toujours possible de former un triangle rectangle, quelle que soit la longueur de la ficelle ?