Chapitre 1 : Second degré

I Activité d'introduction

Exercice 1 (avec un algorithme)
On considère l'algorithme suivant donné sous la forme d'une fonction en langage Python :

```
def f(x) :
   a=x+2
   b=x-6
   y=a*b
   return(y)
```

1. Montrer que si l'on entre 8, le nombre affiché en sortie est 20.
2. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ? On note f cette fonction.
3. Étudier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "l'algorithme renvoie un résultat toujours positif ou nul",
   (b) "f est croissante sur $\mathbb{R}$",
4. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 16$.
   (b) En déduire que f admet un minimum de -16 et préciser en quelle valeur il est atteint.

Propriété (forme canonique simplifiée)
Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, et c réels, $a \neq 0$.
Il existe des réels α et β uniques tels que pour tout $\in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Cette expression est appelée la forme canonique de f.
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de f est une parabole de sommet le point $S(\alpha; \beta)$.
La parabole est orientée vers le haut si et seulement si $a > 0$.
La parabole est orientée vers le bas si et seulement si $a > 0$.

Exercice 2 (exploiter la forme canonique)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le tableau de variation puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-5)^2 + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+7)^2 - 9$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 6$

Exercice 3 (mise sous forme canonique)
Mettre sous forme canonique les fonctions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 24x - 3$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 3x - 4$.

II Forme canonique

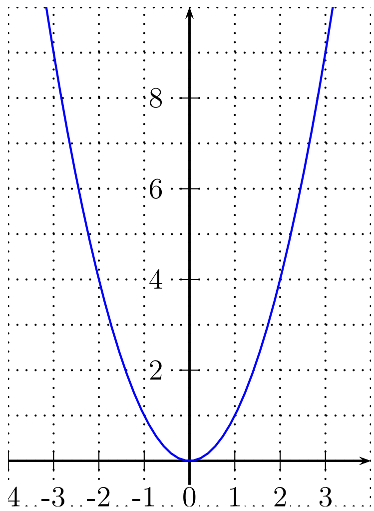
Définition
Une fonction f est une fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) s'il existe des réels a, b, et c, avec $a \neq 0$, tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On dit que a, b et c sont les coefficients de f.

Exemple :
Soit f la fonction définie qur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
Les coefficients sont $a = 3$, $b = -6$, et $c = 1$.

Remarque
La fonction carré, définie par $f(x) = x^2$ est une fonction du second degré.
Les coefficients sont $a = 1$, $b = 0$, et $c = 0$.



Définition (et théorème)
Pour toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe des réels α et β uniques tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de f.

Démonstration
La démonstration est à la fin du paragraphe. □

Exercice 4
Reconnaître les coefficients a, α et β dans les formes canoniques suivantes :

1. $f(x) = 7(x - 3)^2 + 4$
2. $g(x) = -(x + 6)^2 + 2$

Théorème (Tableau de variation)
Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction du trinôme du second degré sous forme canonique ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration

Cas où $a > 0$.
Montrons que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty; \alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \ldots v - \alpha \ldots 0$.
Or, ...
. . . .
Donc $(u-\alpha)^2 \ldots (v-\alpha)^2$
En multipliant par $a > 0$, il vient :

$$a(u-\alpha)^2 \ldots a(v-\alpha)^2$$

En ajoutant une constante (β), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc . . . .
Ainsi, $f(u) \ldots f(v)$.
f est . . . . sur $]-\infty; \alpha]$

Cas où $a < 0$.
Montrons que f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty; \alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \ldots v - \alpha \ldots 0$.
Or, ...
. . . .
Donc $(u-\alpha)^2 \ldots (v-\alpha)^2$
En multipliant par $a < 0$, il vient :

$$a(u-\alpha)^2 \ldots a(v-\alpha)^2$$

En ajoutant une constante (β), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc . . . .
Ainsi, $f(u) \ldots f(v)$.
f est . . . . sur $]-\infty; \alpha]$

Les deux autres cas qui complètent la démonstration se montrent de façon analogue. $\square$

Exercice 5 (prolongement de l'ex 4)
À partir des formes canoniques suivantes, dresser le tableau de variation de la fonction.

1. $f(x) = 7(x-3)^2 + 4$
2. $g(x) = -(x+6)^2 + 2$

Démonstration de la forme canonique

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou encore

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Ainsi, en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Ceci prouve l'existence de la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ et l'unicité de α et β.

Remarque
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de f.

III Équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

Définition
Le nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ est une racine de la fonction f si $f(x_0) = 0$.

Exercice 6
Déterminer les racines de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 7x$.

Étude du cas général (démonstration)
On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
On part de la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta < 0$.
  Alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$.
  Alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
  $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$.
  L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on peut parler de $\sqrt{\Delta}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \qquad \text{(identité remarquable)} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Théorème (Équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ ("Delta", appelé le discriminant).

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle, et on ne peut pas factoriser $f(x)$.
- Si $\Delta = 0$, alors f a une unique racine (double) qui est $x_0 = -\frac{b}{2a}$, et f admet la factorisation

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, alors f a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  On a alors la factorisation

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^2 - 3x + 7 = 0$. [1]

1. $\Delta = -47 < 0$, l'équation n'a pas de solution.

2. $4x^2 - 4x + 1 = 0.$ [2]
3. $x^2 + 7x + 10 = 0.$ [3]

Remarque
Lorsque le trinôme est incomplet, on peut résoudre l'équation du second degré sans passer par le calcul de Δ.

Exercice 8 (sans Δ)
Résoudre les équations suivantes sans calculer le discriminant Δ.

1. $-x^2 + 7x = 0$ [4]
2. $13x^2 + 5 = 0$ [5]
3. $2x^2 - 11 = 0$ [6]

III.1 Somme et produit des racines lorsque $\Delta > 0$

On suppose ici que $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Théorème (Somme et produit des racines)

1. Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ a des racines (i.e. $\Delta > 0$), leur somme est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.
2. Deux nombres ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ce sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$.

Remarque
Le second point fournit une méthode pour trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Exercice 9
Existe-t-il des rectangles dont le périmètre mesure 22 cm et l'aire 24 cm^2 ? Lesquels ? [7]

---

2. $\Delta = 0$, l'équation a une solution qui est $\frac{1}{2}$.
3. $\Delta = 9$, puis on trouve $S = \{-5; -2\}$.
4. $S = \{0; 7\}$
5. $S = \varnothing$ (vide)
6. $S = \{-\frac{2\sqrt{11}}{2}; \frac{2\sqrt{11}}{2}\}$
7. $S = 11$, $P = 24$, $x^2 - 11x + 24 = 0$: les seules dimensions possibles sont 8 et 3.

IV Signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On repart de la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

avec $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ d'où :

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta = 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Dans le cas[8] où $x_1 < x_2$, on a

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Théorème (Signe du trinôme)
- Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, alors ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $(-a)$ entre les racines.

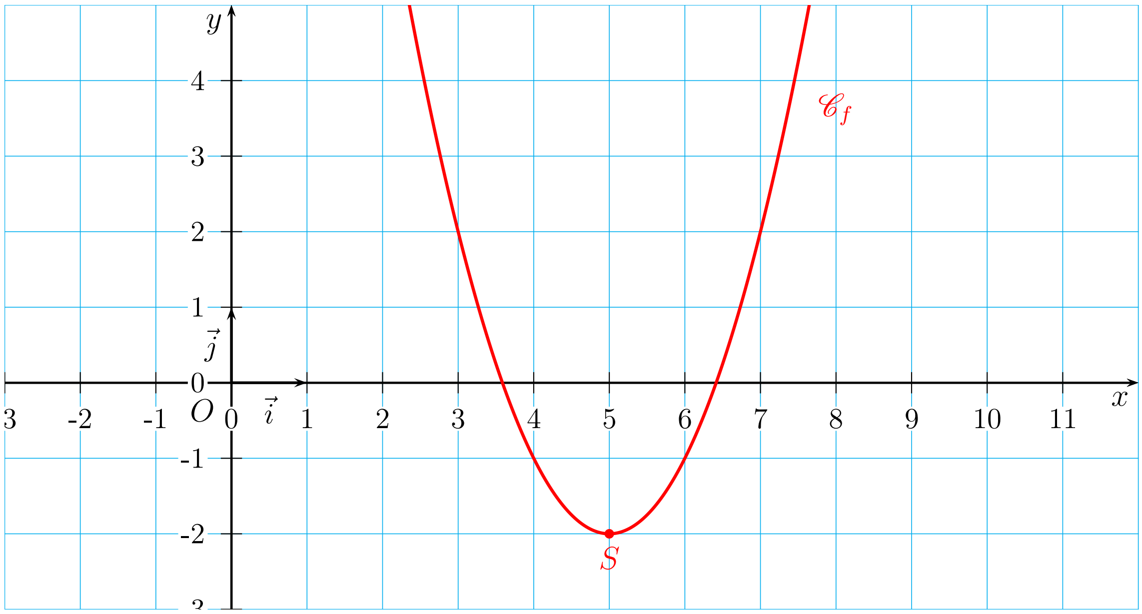
8. Sinon, il faut les échanger dans la première ligne et adapter le tableau.

V Aspect graphique

Théorème
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est une parabole :
- tournée vers le haut si $a > 0$,
- tournée vers le bas si $a < 0$.

Son sommet est le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
La droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ (parallèle à (Oy)) est axe de symétrie de la courbe.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 23$.
Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
$x_S = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{10}{2} = 5$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 23 = 8$.
$y_S = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-8}{4} = -2$.
Le sommet de la parabole est le point $S(5; -2)$.



Remarque
1. On peut peut aussi trouver l'ordonnée du sommet en calculant $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
   Sur l'exemple précédent, $y_S = f(5) = 25 - 50 + 23 = -2$.

2. Dans la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$, on avait démontré que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

VI Algorithme d'étude du trinôme $ax^2 + bx + c$

Algorithme TI-82, TI-83

```
: Prompt A,B,C
: B∧2-4AC → D
: Disp "Delta=",D
: If D>0
: Then
: Disp "Deux solutions"
: Disp (-B-√(D))/(2A)►Frac, (-B+√(D))/(2A)►Frac
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "Une solution"
: Disp (-B)/(2A)►Frac
: Else
: Disp "Pas de solution"
: End
: End
: Pause
: Disp "sommet"
: Disp -B/(2A)►Frac, -D/(4A)►Frac
```

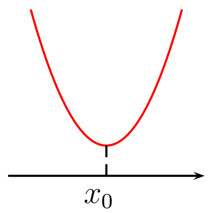
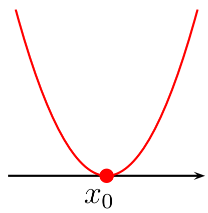
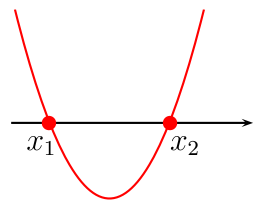
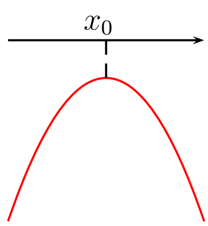
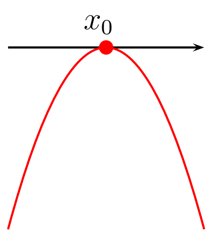
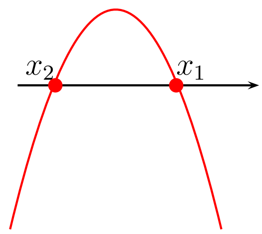
On affiche de plus les coordonnées du sommet de la parabole.

Algorithme Casio

```
"A=" ?→ A
"B=" ?→ B
"C=" ?→ C
B∧2-4AC → D
"Delta="
D ◢
If D>0
Then "Deux solutions"
(-B-√(D))/(2A) ◢
(-B+√(D))/(2A)◢
Else
If D=0
Then
"Une solution"
(-B)/(2A)◢
Else "Pas de solution"
IfEnd
IfEnd
"sommet"
-B/(2A)◢
-D/(4A)◢
```

VII Synthèse

$f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac$.
Sommet de la parabole $S(\alpha;\beta)$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Équation $ax^2+bx+c=0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de ax^2+bx+c	Pas de factorisation	$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
Allure si $a > 0$			
Allure si $a < 0$			
Signe de ax^2+bx+c	Toujours du signe de a	Pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, signe de a	Signe de a à l'extérieur des racines

VIII Complément

VIII.1 Fonctions polynômes

Définition
Une fonction f non nulle est une fonction polynôme s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et des réels a_0, a_1, ..., a_n, avec $a_n \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Le nombre entier n est le degré du polynôme.
Les nombres réels a_0, a_1, ..., a_n sont les coefficients du polynôme.

Remarque
La fonction nulle est une fonction polynôme. On convient que son degré est $-\infty$.

Exemple : Considérons le polynôme $P(x) = 3 - 2x^4 + 7x^8 - 3x^2$.
Son degré est ...
Le monôme en x^4 (terme de degré 4) est ...
Le terme de degré 1 est ...
Le terme constant est ...
Le coefficent de x^2 est ...

Exercice 10
Soient f et g les polynômes donnés par $g(x) = (4x^2 - 7x + 3)(2x^3 - x)$ et $h(x) = x^2(2x^2 - 4)(4x^3 - 1)$.
Sans développer, déterminer
- le degré de g :
- le degré de h :
- le terme de plus haut degré de g :
- le terme de plus haut degré de h :
- le terme de plus bas degré de g :
- le terme de plus bas degré de h :

Définition
Le nombre $a \in \mathbb{R}$ est une racine du polynôme f lorsque $f(a) = 0$.

Exercice 11
Déterminer les racines du polynôme $x^3 - 4x$.

VIII.2 Identification de deux polynômes

Théorème
Deux fonctions polynômes de même degré sont égales si et seulement si leurs coefficients sont respectivement égaux.

Remarque
Deux fonctions polynômes de degré différents ne sont jamais égales.

Exercice 12
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$.
Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.

VIII.3 Factorisation de polynômes

Théorème (Factorisation)
Le nombre a est racine du polynôme f si et seulement si on peut mettre $(x-a)$ en facteur dans l'expression de $f(x)$.
Alors, on a
$$f(x) = (x-a)g(x)$$
Intérêt : Si $deg(f) = n$ alors $deg(g) = n-1$.

Exemple : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$
On remarque que $f(-1) = 0$. Donc on peut factoriser $f(x)$ par $(x+1)$.
Comme f est de degré 3, $f(x)$ s'écrit $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
Après identication des coefficients, on obtient $f(x) = (x+1)(4x^2 - 7x + 2)$.