Chapitre 1 : Ensembles de nombres réels

Un peu d'histoire

- Apparition du zéro : vers 500 ans après J.-C.
- Nombres négatifs : ils sont connus en Chine au V$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., mais il faut attendre le XVI$^{\text{e}}$ siècle pour accepter les solutions négatives d'une équation (Albert Girard).
  En France, le premier manuel qui traite des nombres négatifs date de 1886.
- Nombres décimaux : au XV$^{\text{e}}$ siècle, Al-Kashi élabore une écriture décimale des nombres décimaux, reprise et généralisée par Simon Stévin au XVI$^{\text{e}}$ siècle.
  Les nombre décimaux ne sont définitivement adoptés en France qu'en 1801 avec le système métrique.
- Nombres rationnels : 3000 ans av. J.-C., les Egyptiens utilisent des fractions avec 1 comme numérateur.
  La notation avec un trait de fraction s'impose au XVII$^{\text{e}}$ siècle.
- Nombres irrationnels : Au VI$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., l'école pythagoricienne montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- La construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ est due à Dedekind et Cantor (XIX$^{\text{e}}$ siècle).

I Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Notations

- Pour exprimer que A est l'ensemble formé par les nombres -1, 2, 9 et 12, on utilise des accolades : $A = \{-1; 2; 9; 12\}$.
- Le nombre 2 appartient à A, on note $2 \in A$. 3 n'appartient pas à A, on note $3 \notin A$.
- Soit B l'ensemble $B = \{2; 12\}$. Comme tous les éléments de B sont dans A, on dit que B est inclus dans A et on note $B \subset A$.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 10\,000; \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).
$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -10\,001; -10\,000; \ldots; -1; 0; 1; 2; \ldots; 10\,000; \ldots\}$$

Remarque
Tout nombre entier naturel est aussi un entier relatif : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

I.1 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition
Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Exemple : $-2.34 \in \mathbb{D}$ car $-2,34 = \dfrac{-234}{10^2}$.

Remarque
Tout entier relatif est un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, $a = \dfrac{a}{10^0}$. Ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Exercice 1
Montrer que les nombres suivants sont décimaux.

1. 6,1
2. $\dfrac{11}{20}$

Propriété (admise)
Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.
Les nombres décimaux sont les nombres dont le développement décimal a un nombre fini de chiffres.

Définition
L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$), et n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple : donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
$5\,430\,000 = \ldots$ $\qquad$ $0.062\,3 = \ldots$

I.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs ($b \neq 0$). On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels.

Exemple : $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Remarque
Tout nombre décimal est un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété (admise)
Tout nombre rationnel peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible, c'est-à-dire avec $PGCD(p, q) = 1$.
Tous les nombres rationnels ont un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

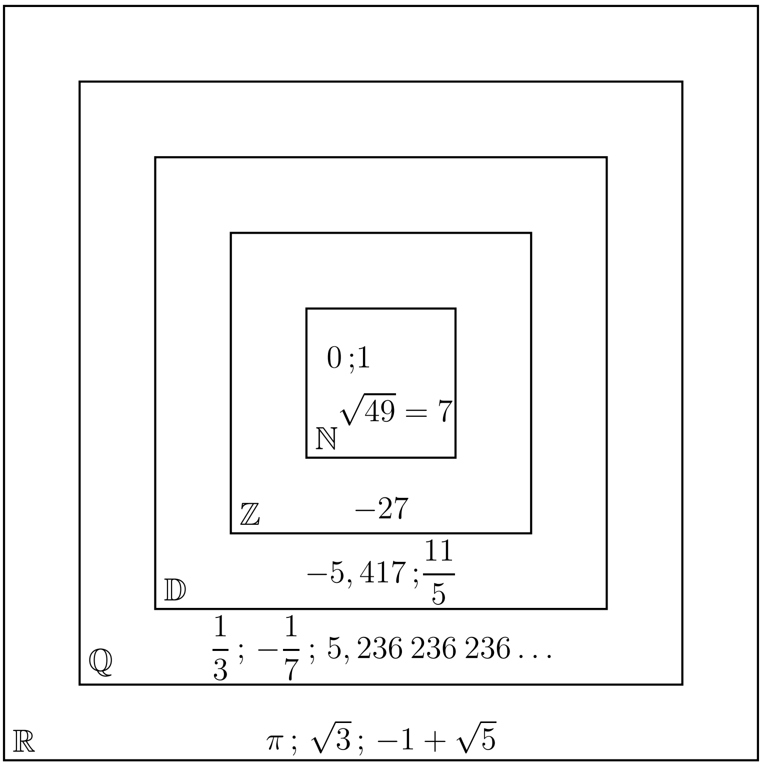
Exemple :
les nombres suivants sont rationnnels.
$\dfrac{5}{4} = 1,25 = 1,2500000\ldots$, $\dfrac{1}{3} = 0,3333\ldots$, $6 = 6,000\ldots$, $\dfrac{19}{33} = 0,57575757\ldots$.

Remarque
Parmi les nombres rationnels, il y a :
- les nombres décimaux qui ont un développement décimal fini.
- et les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux. Ceux-ci ont un développement décimal infini mais avec une période.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (irrationnels), comme par exemple $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) ou π (périmètre d'un cercle de diamètre 1).
Les nombres irrationnels ont un développement décimal infini non périodique.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, il contient les nombres rationnels et les irrationnels.

I.2.a Synthèse

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Exercice 2
Placer sur le schéma les nombres suivants : $-\dfrac{3}{4}$; $-\sqrt{36}$; 6,21 ; $\dfrac{2}{15}$; $\dfrac{6}{25}$.

Exercice 3
Montrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Raisonner par l'absurde.

II Encadrement et approximation de réels par des nombres décimaux

Définition
Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $a \leqslant x \leqslant b$ où a et b sont des nombres décimaux.
L'amplitude de l'encadrement est la différence $b - a$.

Exemple :
$\sqrt{3} \approx 1,732\,051$.
Un encadrement décimal de $\sqrt{3}$ d'amplitude 10^{-2} est $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

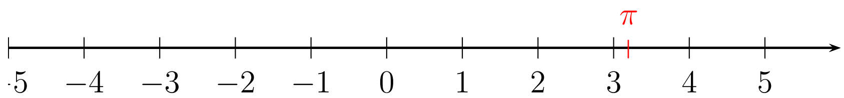
Définition
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'arrondi à 10^{-n} près du réel x est le nombre décimal à n chiffres après la virgule le plus proche de x.

Exemple :
$\pi \approx 3,141\,592\,654$.
L'arrondi de π à 10^{-2} est ....
L'arrondi de π à 10^{-3} est ....

III Intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

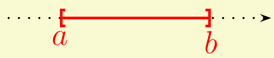
III.1 La droite graduée

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres connus en seconde. Il contient les rationnels, ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), et les nombres irrationnels comme par exemple π ou $\sqrt{2}$. On représente l'ensemble des nombres réels par une droite graduée. A chaque point de cette droite correspond un unique nombre réel, et réciproquement.

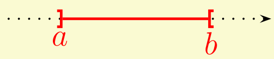


III.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

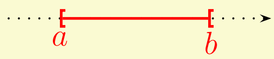
Définition (Intervalles bornés)
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
L'intervalle fermé $[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



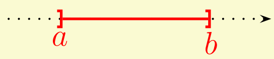
L'intervalle ouvert $]a;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



L'intervalle $[a;b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.

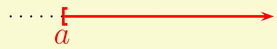


L'intervalle $]a;b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.

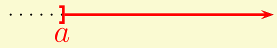


Remarque
Le symbole mathématique pour l'infini est ∞.

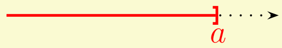
Définition (Intervalles non bornés)
Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'intervalle fermé $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.



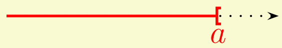
L'intervalle ouvert $]a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.



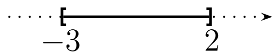
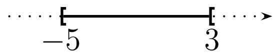
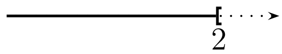
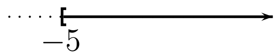
L'intervalle fermé $]-\infty; a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.



L'intervalle ouvert $]-\infty; a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.



Exemple :

Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leqslant x \leqslant 2$	$[-3; 2]$	
$-5 \leqslant x < 3$	$[-5; 3[$	
$x < 2$	$]-\infty; 2[$	
$x \geqslant -5$	$[-5; +\infty[$	

Remarque
On ouvre toujours les crochets pour $+\infty$ et $-\infty$.
$\mathbb{R}$ est un intervalle, il s'écrit $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

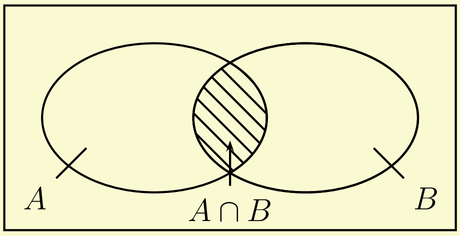
Exercice 4
Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle.

1. $9x + 7 \leqslant 2x - 11$
2. $-6x + 4 > x + 9$
3. $2 - x < 7x + 9$
4. $\dfrac{2x+1}{3} < x - 4$
5. $\dfrac{2}{7}x - 1 > x + \dfrac{5}{3}$

III.3 Intersection et réunion

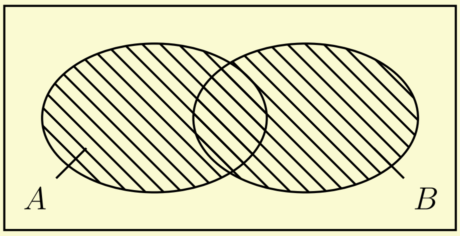
Définition

1. Intersection de deux ensembles.
   L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.
   La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exercice 5
Traduire à l'aide d'intervalles les conditions suivantes :
a) $x > 1$
b) $x < 2$ et $x \geqslant -5$
c) $x < 0$ ou $x \leqslant 2$
d) $-3 < x \leqslant 1$

Exercice 6
Écrire plus simplement les ensembles suivants :
a) $]-4;5[\ \cap\ [1;10]$.
b) $[-\infty;2[\ \cup\ ]-1;3]$
c) $[1;4]\ \cap\ [6;7]$
d) $]-\infty;-3]\ \cup\ ]-5;+\infty[$
e) $[4;12[\ \cup\ ]-3;15[$

Remarque
Notations particulières :
$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$.
$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.
$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$.

IV Valeur absolue

IV.1 Valeur absolue d'un réel

Définition
Soit x un nombre réel. Notons M l'image de x sur la droite graduée réelle. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance OM, aussi appelée distance de x à 0.

$$|x| = d(x; 0)$$

Exemple : $|5| = 5$. $|-3| = 3$

Propriété
Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$.
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Remarque
Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.

Exercice 7
Calculer :

1. $a = |4 - 7|$
2. $b = |7 - 4|$
3. $c = 4 - 3|1 - 8|$
4. $d = 2 \times |-3| + \dfrac{1}{2} \times |5|$.

IV.2 Distance et valeur absolue

Propriété
Soient a et b deux nombres réels d'images respectives A et B sur l'axe réel. Alors,

$$AB = d(a; b) = |b - a| = |a - b|$$

Remarque
Par abus de langage, on parle parfois de la distance entre les réels a et b. Alors, $d(a; b) = |a - b|$.

Remarque
Soient a un nombre réel et $r > 0$.
L'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.