Correction de l'interrogation n° 6
Sujet 1

Exercice 1

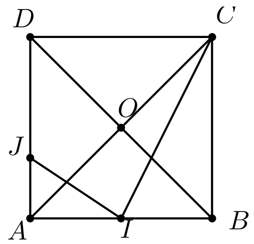
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 4$, $BC = 5$.
   Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.}$
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 6$.
   Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
   Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le mileu de $[AB]$.
   D'après la formule du projeté,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} \\ &= 6 \times \frac{6}{2} \\ &= 18\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18.}$
3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$ et $C(4;0)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= xx' + yy' \\ &= 3 \times 9 - 3 \times (-2) \\ &= 33\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33.}$
4. $AB = AC = 2$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CA}) + \pi \quad [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{3} + \pi \quad [2\pi] \\ &= \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]\end{aligned}$$
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= 2 \times 2 \times \cos\frac{2\pi}{3} \\ &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2.}$
5. $AB = 4$, $BC = 3$, et $AC = 6$.
   D'après une formule du produit scalaire avec les normes,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(16 + 36 - 9) \\ &= \frac{43}{2}\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21.5.}$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$. Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. - $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -AD \times AD = -1$ (puisque D est le projeté orthogonal de C sur (AD)).
   - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
     Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
     De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \times AI = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ puisque I est le projeté orthogonal de O sur (AB)).
     Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}$.

- $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}$.
  Or $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
  De plus, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,
  donc $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}BC^2 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.
  Donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}$.

2. (a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 0)$ et J a pour coordonnées $(0; \frac{1}{3})$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   C a pour coordonnées $(1; 1)$, donc $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

   (c) On a $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC} = IJ \times IC \cos(\widehat{JIC})$.
   Or $IJ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$.
   Et $IC = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit que $\frac{1}{12} = \frac{\sqrt{13}}{6} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\widehat{JIC})$,
   donc $\cos(\widehat{JIC}) = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$.

Exercice 3 (7 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros. Le 1er janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le mois précédent. On note $u_1 = 30$, et pour tout $n \geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2 = u_1 + 12 = 42$, et $u_3 = u_2 + 12 = 42 + 12 = 54$.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 12$.
   Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 12.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r = 30 + (n-1) \times 12$.
3. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
   $u_{12} = 30 + 11 \times 12 = 162$.
   Le 1er décembre 2015, il dépose la somme de 162 euros.
4. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2015.
   (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} C_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\ &= \frac{[30 + 30 + (n-1) \times 12] \times n}{2} \\ &= \frac{(48 + 12n)n}{2} \\ &= (24 + 6n)n \\ &= 6n^2 + 24n \end{aligned}$$

   (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.
   On cherche le plus petit entier n tel que $C_n \geqslant 1500$.
   On résout l'inéquation $6x^2 + 24x - 1500 \geqslant 0$.
   En simplifiant par 6, $x^2 + 4x - 250 \geqslant 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1016$.
   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots \approx -17,93$.
   $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots \approx 13,93$.
   Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 250$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Le plus petit entier naturel n pour lequel $6n^2 + 24n \geqslant 1500$ est donc $n = 14$.
   Le mois d'indice 14 est le mois de février 2016.
   Il pourra acheter la guitare en février 2016.

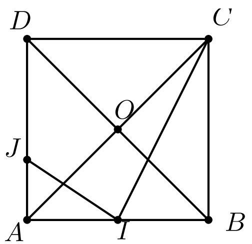
Réponses du sujet 2

Exercice 4

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10\times 5=50$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=33$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-5$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$. Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. • $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-AD\times AD=-1$ (puisque D est le projeté orthogonal de C sur (AD)).
   • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
   De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=-AB\times AI=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ puisque I est le projeté orthogonal de O sur (AB)).
   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}$.
   • $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   Or $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
   De plus, $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,
   donc $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}BC^2=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}$.

2. (a) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, I a pour coordonnées $(\frac{1}{2};0)$ et J a pour coordonnées $(0;\frac{1}{3})$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
   C a pour coordonnées $(1;1)$, donc $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.
   (b) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.
   (c) On a $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IC}=IJ\times IC\cos(\widehat{JIC})$.
   Or $IJ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$.
   Et $IC=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit que $\frac{1}{12}=\frac{\sqrt{13}}{6}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(\widehat{JIC})$,
   donc $\cos(\widehat{JIC})=\frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{65}}$.

Exercice 6 (7 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros. Le 1er janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 15 euros de plus que le montant déposé mois précédent. On note $u_1=30$, et pour tout $n\geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2=45$, $u_3=60$.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Justifier.
   $u_n=u_1+(n-1)r=30+(n-1)\times 15$.
3. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
   $u_{12}=195$. C'est le dépôt du mois de décembre 2015.
4. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1=30$ pour le mois de janvier 2015.
   (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
   $$\begin{aligned}C_n &= u_1+u_2+\cdots+u_n\\ &= \frac{(u_1+u_n)\times n}{2}\\ &= \frac{[30+30+(n-1)\times 15]\times n}{2}\\ &= \frac{(45+15n)n}{2}\\ &= 7,5n^2+22,5\end{aligned}$$
   (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.
   $C_n\geqslant 1500$ pour $n\geqslant 13$.
   Il pourra acheter la guitare en janvier 2016.