Probabilités, variables aléatoires.
Exercices corrigés.

Exercice 1

On considère le jeu suivant :
le joueur place une mise de n euros sur la table, n étant un entier naturel non nul.
Puis il tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte tirée est :

- un as, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise au carré.
- un roi, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise plus huit euros.
- une dame ou un valet, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.
On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, en tenant compte de sa mise au départ.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$ en fonction de n.
4. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles le jeu est équitable ?
5. Pour quelles valeurs de n le joueur peut-il espérer gagner en moyenne au moins deux fois sa mise s'il joue un grand nombre de fois ?

Correction

1.
   - S'il tire un as, le joueur obtient n^2 euros.
   - S'il tire un roi, le joueur obtient $n+8$ euros.
   - S'il tire une dame ou un valet, le joueur obtient n euros.
   - Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.

   Donc, les valeurs prises par X sont : n^2, $n+8$, n et $-n$.
2.
   - Il y a quatre as sur 52 cartes, donc $p(X=n^2)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$.
   - Il y a quatre roi sur 52 cartes, donc $p(X=n+8)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$.
   - Il y a quatre valets et quatre dames sur 52 cartes, donc $p(X=n)=\dfrac{8}{52}=\dfrac{2}{13}$.
   - $p(X=-n)=1-\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{13}-\dfrac{2}{13}=\dfrac{9}{13}$.
3. $E(X)=n^2p(X=n^2)+(n+8)p(X=n+8)+np(X=n)+(-n)p(X=-n)$
   $E(X)=n^2\times\dfrac{1}{13}+(n+8)\times\dfrac{1}{13}+n\times\dfrac{2}{13}+(-n)\times\dfrac{9}{13}$
   $E(X)=\dfrac{n^2+(n+8)+2n+(-9n)}{13}$
   $E(X)=\dfrac{n^2-6n+8}{13}$
4. Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$, c'est à dire $n^2-6n+8=0$.
   On obtient une équation du second degré qui a pour solutions 2 et 4.
   Le jeu est équitable pour une mise de 2 euros ou de 4 euros.
5. Le joueur peut espérer gagner au moins deux fois sa mise si et seulement si $E(X)\geqslant 2n$.
   $E(X)\geqslant 2n \iff \dfrac{n^2-6n+8}{13}\geqslant 2n \iff n^2-6n+8\geqslant 26n \iff n^2-32n+8\geqslant 0$.
   $n^2-32n+8$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta=32^2-32=992$. Il a deux racines : $x_1=\dfrac{32-\sqrt{992}}{2}=16-2\sqrt{62}\approx 0,25$ et $x_2=\dfrac{32+\sqrt{992}}{2}=16+2\sqrt{62}\approx 31,75$.
   De plus, le coefficient de x^2 est positif, donc, n étant un entier naturel, $n^2-32n+8\geqslant 0$ si et seulement si $n\geqslant 32$. Donc, s'il joue un grand nombre de fois, le joueur peut espérer gagner en moyenne deux fois sa mise, si et seulement si sa mise dépasse ou est égale à 32 euros .

Exercice 2

n° 83 page 287

Une roue de loterie est partagée en 2 secteurs verts, 5 secteurs blancs et n secteurs rouges ($n > 0$).
Après avoir misé 10 €, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe.
Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

— Si le secteur est vert, le joueur reçoit 40 € ;
— Si le secteur est blanc, il récupère sa mise ;
— Si le secteur est rouge, il perd sa mise.

Soit X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
   $40 - 10 = 30$.
   Donc X_n prend ses valeurs dans $\{-10; 0; 30\}$.
   $2 + 5 + n = n + 7$. La roue compte $(n + 7)$ secteurs.
   Comme chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère, il y a équiprobabilité.
   $P(X_n = -10) = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas total}} = \dfrac{n}{n+7}$.
   $P(X_n = 0) = \dfrac{5}{n+7}$.
   $P(X_n = 30) = \dfrac{2}{n+7}$.
   La loi de probabilité de X_n est résumée dans le tableau :

x_i	-10	0	30
$P(X_n = x_i)$	$\dfrac{n}{n+7}$	$\dfrac{5}{n+7}$	$\dfrac{2}{n+7}$

2. L'organisateur rentre dans ses frais si $E(X_n) \leqslant -2$. Déterminer le nombre minimal de cases rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum x_i \times p_i \\ &= \frac{-10n + 0 \times 5 + 30 \times 2}{n+7} \\ &= \frac{-10n + 60}{n+7} \end{aligned}$$

   On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X_n) \leqslant -2$, soit $\dfrac{-10n+60}{n+7} \leqslant -2$.
   Comme pout tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 7 > 0$, on peut multiplier membre à membre l'inégalité par $n + 7$ et le sens de l'inégalité est conservé. Donc

$$\begin{aligned} \frac{-10n+60}{n+7} &\leqslant -2 \\ -10n + 60 &\leqslant -2n - 14 \\ -8n &\leqslant -74 \\ n &\geqslant \frac{74}{8} = 9,25 \end{aligned}$$

   On retient le plus petit entier $n \geqslant 9,25$, c'est-à-dire 10.

   $\boxed{\text{À partir de 10 secteurs rouges sur la roue, l'organisateur rentre dans ses frais.}}$

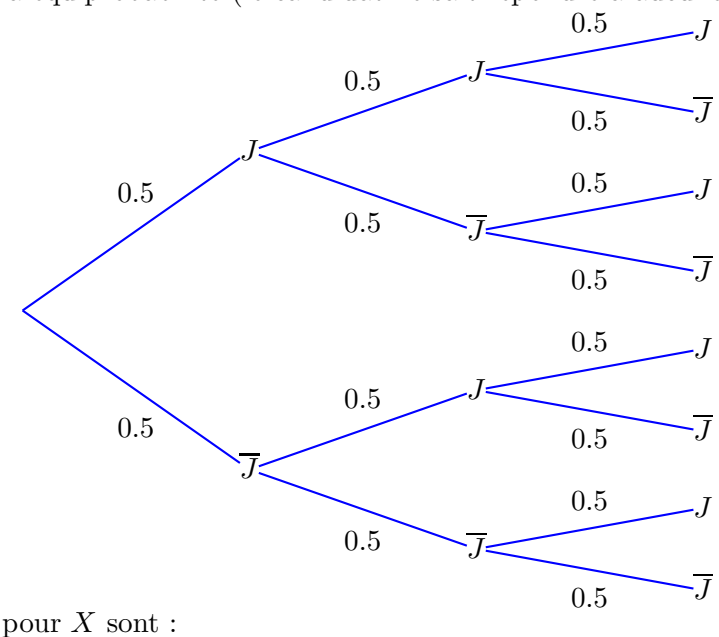
Exercice 3
n° 96 page 289
On propose à un candidat à un examen un Vrai-Faux formé de 3 questions.
Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Si le total des points est négatif, la note globale de l'exercice est ramenée à 0.
Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :

— répondre au hasard aux 3 questions,
— ne pas répondre à l'une des questions (par exemple la première), et répondre au hasard pour les deux autres.

Quelle est la stratégie la plus favorable au candidat ?

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus à l'exercice avec la première stratégie, et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus à l'exercice avec la seconde stratégie.
Il s'agit de comparer $E(X)$ et $E(Y)$.

1. Étude de la loi de X et espérance de X.
   On note naturellement J pour désigner la "la réponse est juste".
   D'après l'énoncé, il y a équiprobabilité (le candidat ne sait répondre à aucune question).

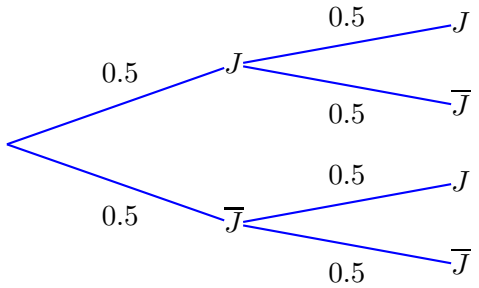


   Les valeurs possibles pour X sont :
   — 6 (avec 3 réponses justes),
   — 3 (exactement 2 réponses justes),
   — 0 (au plus une réponses juste).
   $P(X=6) = P(J;J;J) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
   On peut aussi le déduire directement par la formule d'équiprobabilité. En effet, chacune des 8 issues a la même probabilité.
   $P(X=3) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas total}} = \frac{3}{8}$.
   $P(X=0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i p_i \\ &= 6 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{8} \\ &= 1,875 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec la première stratégie, le candidat obtient en moyenne 1,875 point à l'exercice.}}$$

2. Étude de la loi de Y et espérance de Y.
   Représentation des réponses aux 2 dernières questions de l'exercice.



   Dans ce cas, les valeurs possibles de Y sont :
   — 4 (si deux réponses justes),
   — 1 (si exactement une réponse juste),
   — 0 (si deux mauvaises réponses)
   Il y a aussi équiprobabilité.
   $P(Y = 4) = \frac{1}{4}$.
   $P(Y = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum y_i p_i \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

   Avec la deuxième stratégie, le candidat obtient en moyenne 1,5 point à l'exercice.

3. Conclusion.
   $E(X) > E(Y)$. Donc la première stratégie est meilleure pour le candidat.