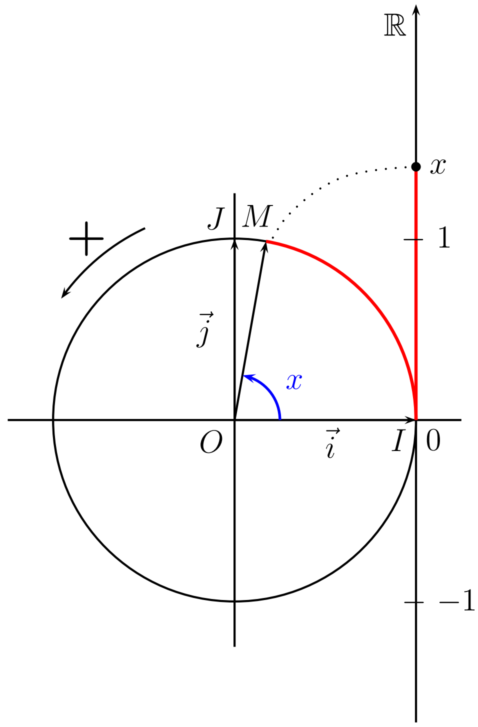
Chapitre 1 : Trigonométrie

I Le cercle trigonométrique

Remarque
L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.



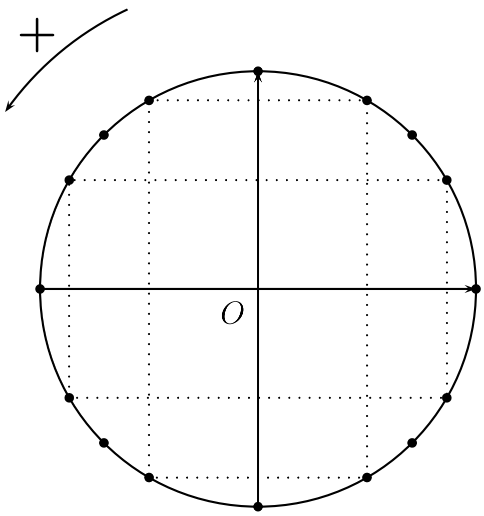
Définition
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I.
Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.
On dit que M est l'image de x sur le cercle.

Remarque
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc ...

Exercice 1
Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

1. 0, π, 2π, 3π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.



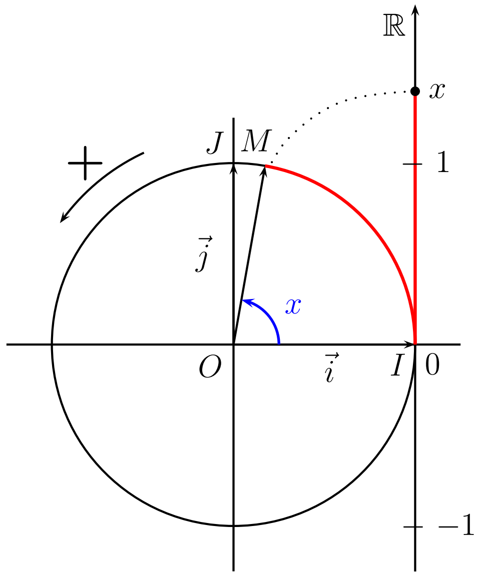
Propriété
Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi ...
....
Les réels x et x' ont la même image ssi il existe ...

Exercice 2
Les réels suivants ont-ils la même image sur le cercle ?

1. $a = 13\pi$ et $b = 4\pi$.
2. $a = \dfrac{5\pi}{4}$ et $b = \dfrac{-19\pi}{4}$.

II Mesures des angles en radians, mesure principale

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons M l'image de x sur le cercle trigonométrique.
On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$.



Remarque

1. Il n'y a pas unicité de la mesure d'un angle orienté de vecteurs : si x est une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$, alors tous les réels de la forme $x+k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des mesures de cet angle.
2. Lorsque $x \in [0;\pi]$, la mesure x de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ correspond à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OM}$.
3. Correspondance degré - radian

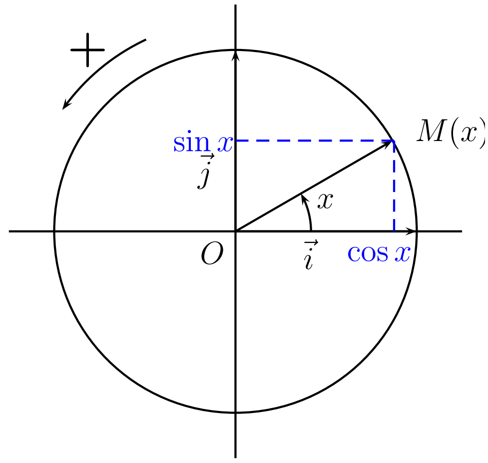
Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30	20
Mesure en radians							

Définition (Mesure principale)
La mesure principale d'un angle orienté est l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

III Trigonométrie

III.1 Cosinus et sinus d'un réel

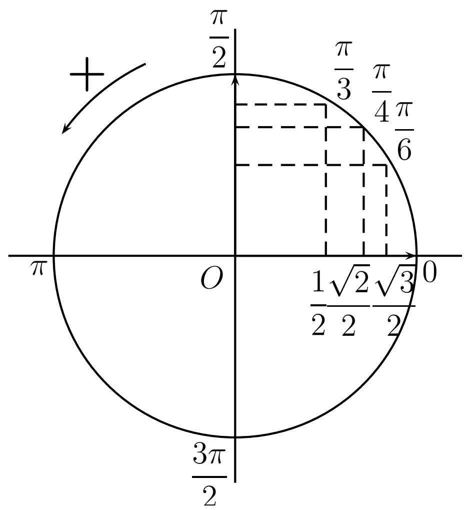
Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\sin x$.



Propriété (Conséquences immédiates)
Pour tout x réel, on a :
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

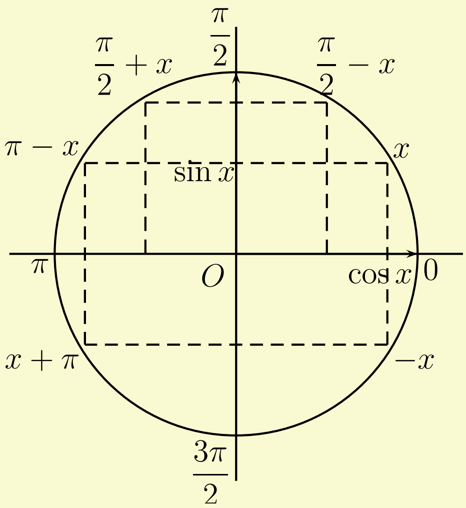


III.2 Angles associés

Théorème

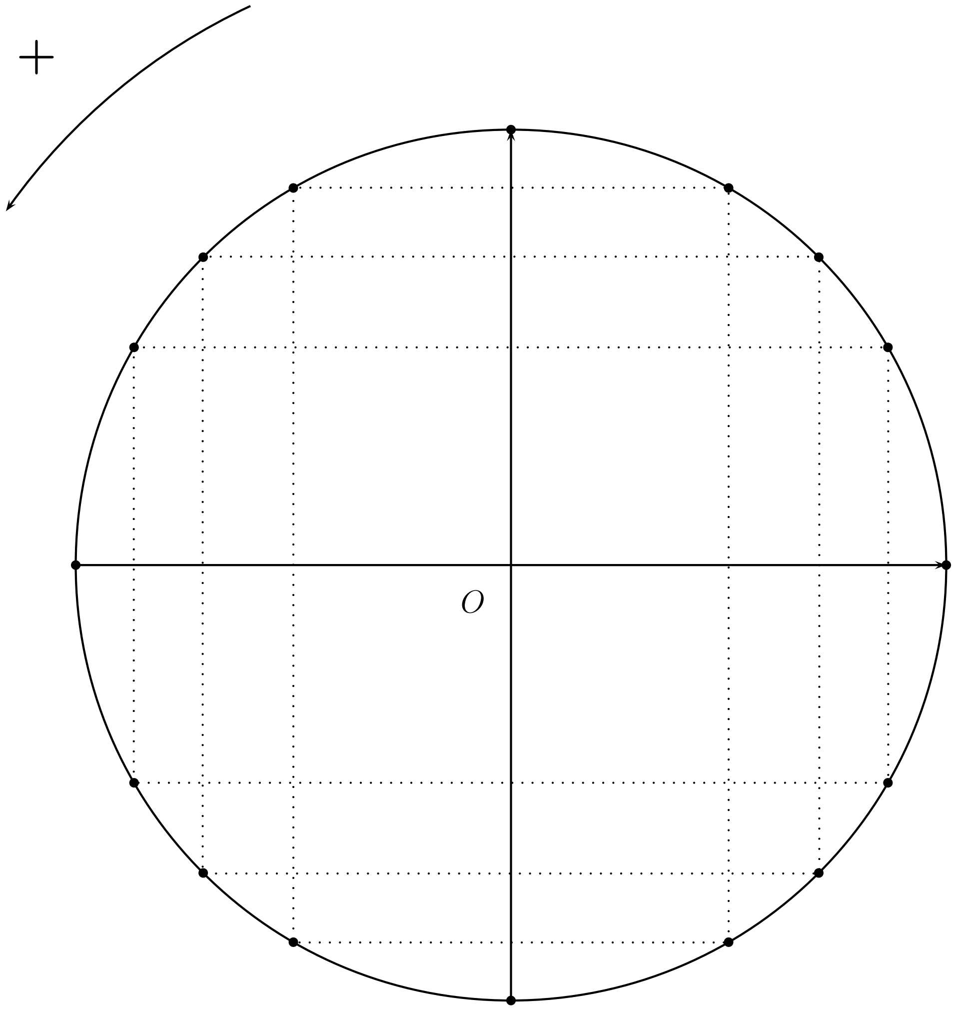
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x)\\
\sin(-x) &= -\sin(x)\\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x)\\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\
\cos(\pi-x) &= -\cos(x)\\
\sin(\pi-x) &= \sin(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos(x)
\end{aligned}$$



Exercice 3

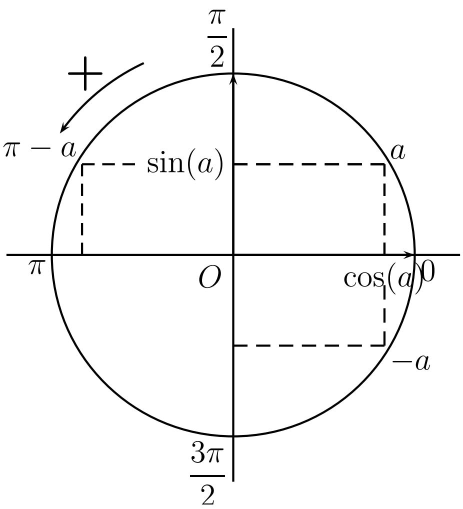
1. cos et sin, angles associés
   ressource 35
   ressource 19
   ressource 1126
2. mesure principale :
   ressource 251
   ressource 568
   ressource 567



III.3 Équations trigonométriques

Remarque
Si b est un réel tel que $b < -1$ ou $b > 1$, alors les équations $\cos(x) = b$ et $\sin(x) = b$ n'ont pas de solution.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Par exemple, les équations $\cos(x) = -1,4$ et $\sin(x) = 2$ n'ont pas de solution.

Propriété
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels de la forme $x = a + k \times 2\pi$ et $x = -a + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels de la forme $x = a + k \times 2\pi$ et $x = \pi - a + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



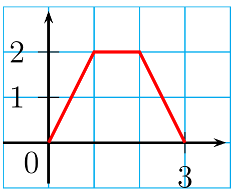
IV Fonctions cosinus et sinus

IV.1 Périodicité

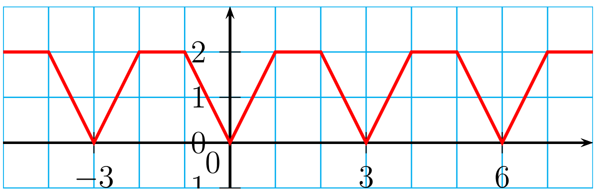
Définition
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.
On dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) lorsque pour tout x réel :

$$f(x+T) = f(x)$$

Conséquence graphique
Lorsqu'une fonction est T-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0;T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



$\xrightarrow[\text{de période 3}]{f \text{ périodique}}$



IV.2 Étude des fonctions cos et sin

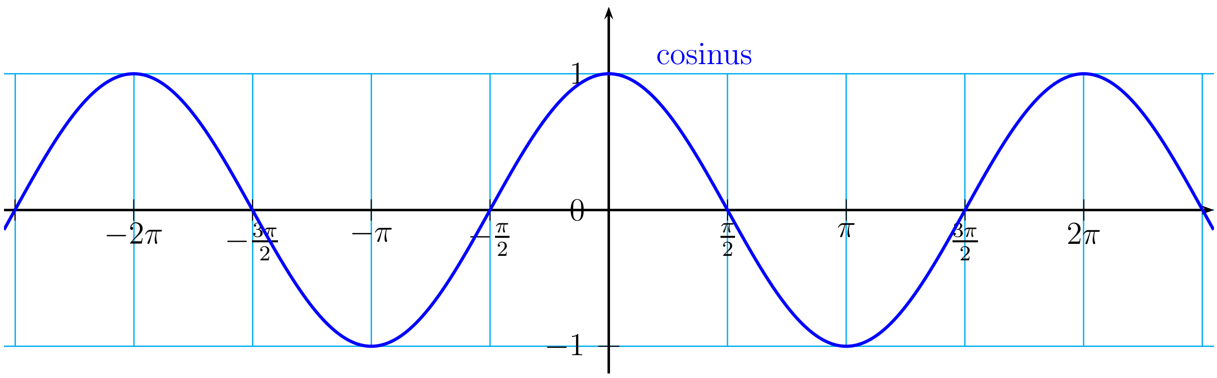
Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
2. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$
3. Tableaux de variation sur $[0; 2\pi]$.

x	0		π		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

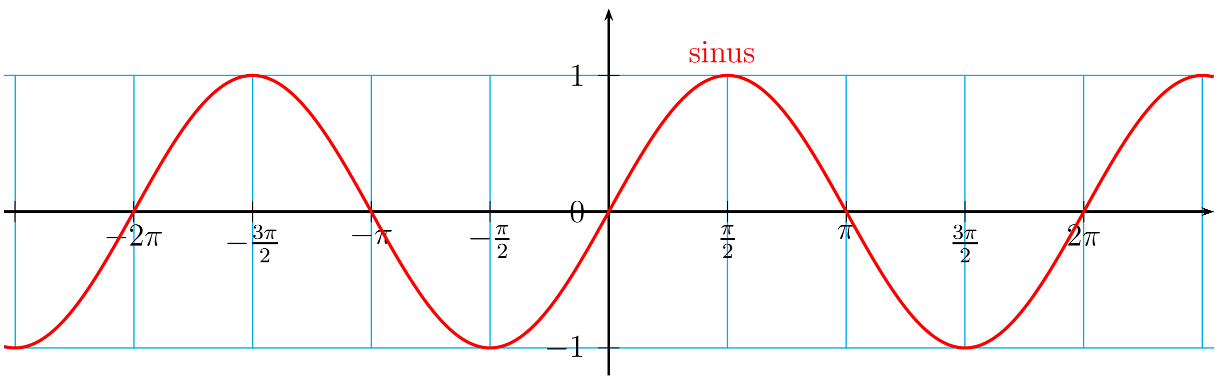
x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Représentation graphique de la fonction cosinus



La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire).

Représentation graphique de la fonction sinus



La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point O, origine du repère (fonction impaire).