1G. Interrogation n° 11
Corrigé du sujet 1

Exercice 1 (cours, 4 points)
Compléter sur l'énoncé :

1. Énoncer le théorème fondamental sur dérivée et variation des fonctions.
   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
   (c) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. Relation d'Al-Kashi dans le triangle quelconque.
   Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$.
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
3. Équation de cercle.
   Dans un repère orthonormé du plan, une équation du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r > 0$ est :
   $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
4. Dans un repère orthonormé du plan, soit (d) la droite d'équation $6x + 5y + 2 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}(6; 5)$ est un vecteur normal à (d).
   Le vecteur $\overrightarrow{u}(-5; 6)$ est un vecteur directeur de (d).

Exercice 2 (5 points)
On considère la fonction f définie sur $[-3; 2]$ par

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4.$$

1. Calculer $f'(x)$.
   f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).}$
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $[-3; 2]$.
   On étudie le signe de $f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$.
   Comme $6 > 0$, $f'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 + x - 2$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Le trinôme prend le signe de a (ici $a = 1 > 0$) à l'extérieur des racines.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	13	$\nearrow$	24	$\searrow$	-3	$\nearrow$	8

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-3; 2]$.
   Sur $[-3; 2]$, le minimum de f est -3 et le maximum est 24.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-3; 2],\ -3 \leqslant f(x) \leqslant 24.}$

Exercice 3 (3 points)
Soit CDE un triangle tel que $CD = 6$, $CE = 4$, et $EC = 5$.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{C}$ arrondie à un degré près.
Dans le triangle CDE, avec les notations de la formule d'Al-Kashi, on a $e = CD = 6$, $d = CE = 4$, et $c = ED = 5$.
Déterminons d'angle $\widehat{C}$.
D'après la formule d'Al-Kashi, $c^2 = d^2 + e^2 - 2ed\cos\widehat{C}$,
soit $\cos\widehat{C} = \dfrac{d^2 + e^2 - c^2}{2ed} = \dfrac{16 + 36 - 25}{2 \times 6 \times 4} = \dfrac{27}{48} = \dfrac{9}{16}$.
À la calculatrice, $\arccos(\dfrac{9}{16}) \approx 55,77$.

$\boxed{\text{Donc, arrondi au degré près, } \widehat{C} \approx 56\,^\circ.}$

Exercice 4 (5 points)
On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer une équation de la droite (d) passant par le point $A(2; -3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-4; 1)$.
   Comme $\overrightarrow{n}(-4; 1)$ est normal à d, d admet une équation de la forme $-4x + y + c = 0$ avec c réel à déterminer.
   De plus, $A(2; -3) \in d$, donc
   $-4 \times 2 + (-3) + c = 0$, soit $c = 11$.
   $\boxed{\text{Une équation de } d \text{ est } -4x + y + 11 = 0\text{, ou encore } y = 4x - 11 \text{ pour l'équation réduite.}}$
2. Le point $B(2; 1)$ appartient-il à (d) ? Justifier.
   $-4 \times 2 + 1 - 11 = -8 + 1 + 11 = -18 \neq 0$.
   $\boxed{\text{Donc } B \notin d.}$
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées.
   Un point C appartient à l'axe des ordonnées ssi son abscisse est nulle.
   $C(0; y) \in d$ ssi $y = 4 \times 0 - 11 = -11$.
   $\boxed{\text{Le point d'intersection de } d \text{ avec l'axe des ordonnées est } C(0; -11).}$
4. Donner l'équation d'une droite (Δ) perpendiculaire à (d). Aucune justification n'est demandée.
   Par exemple, la droite Δ d'équation $x + 4y = 0$ convient. Cette droite a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1; 4)$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{n}(-4; 1)$.

Exercice 5 (3 points)
On se place dans un repère orthonormé du plan.
Montrer que $x^2 + 6x + y^2 - y + 1 = 0$ est l'équation d'un cercle et préciser ses éléments caractéristiques (coordonnées du centre et rayon).

$$\begin{aligned}
x^2 + 6x + y^2 - y + 1 &= 0 \\
x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^3 - 9 + y^2 - 2 \times y \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 &= 0 \\
(x+3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 9 + \frac{1}{4} - 1 \\
(x+3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{33}{4} \\
(x+3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{C'est le cercle de centre } A\left(-3; \dfrac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \dfrac{\sqrt{33}}{2}.}$