# Chapitre 5 : Probabilités

## I Probabilités conditionnelles

**Définition**
Soient $A$ et $B$ deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de $B$ sachant que $A$ est réalisé, notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note parfois aussi $P(B/A)$.

Les probabilités conditionnelles vérifient les propriétés des probabilités. En particulier,

**Propriété**
Soient $A$ et $B$ deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.
2. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
3. S'il y a équiprobabilité sur $\Omega$, $P_A(B) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A} \cap \text{B}}{\text{nombre d'éléments de } A}$.

**Remarque**
Lorsqu'on calcule $P_A(B)$, l'ensemble de référence devient $A$.

Exemple :
Dans une classe de terminale de 32 élèves répartis en 18 filles et 14 garçons, il y a 20 élèves en spécialité LV2 Espagnol, dont 8 filles.
On choisit la fiche d'un élève au hasard, chaque fiche a autant de chance d'être choisie.
On note :
$A$ : « L'élève est une fille ».
$B$ : « L'élève suit la spécialité LV2 Espagnol ».

1. Calculer $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.

**Propriété**
Soient $A$ et $B$ deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
Alors, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

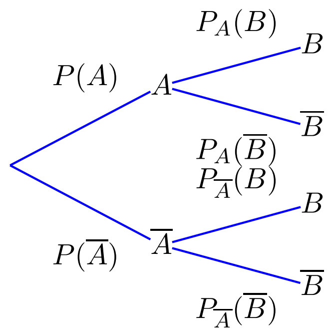
## II Arbre de probabilité

Certaines situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles peuvent être représentées par des arbres pondérés.
On place les événements aux bouts des branches, et les probabilités sur les branches. Un chemin est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés

sur ce chemin.

Exemple :

| 1^er niveau / 2^ème niveau | Événement (chemin) | Probabilité |
|---|---|---|
| | $A \cap B$ | $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ |
| | $A \cap \overline{B}$ | $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$ |
| | $\overline{A} \cap B$ | $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ |
| | $\overline{A} \cap \overline{B}$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$ |




**Propriété**
1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un chemin d'un chemin est le produit des probabilités sur les branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

# III Indépendance

**Définition**
Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).
On dit que $A$ et $B$ sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

**Remarque**
1. Lorsque $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, on dit que $A$ et $B$ sont indépendants.
2. Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la probabilité de l'autre : $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

**Conséquence**
Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

$A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

**Remarque**
Ne pas confondre événements incompatibles et indépendants :
— $A$ et $B$ incompatibles : $A \cap B = \varnothing$ ($A$ et $B$ ne peuvent pas être réalisés ensemble) d'où $P(A \cap B) = 0$.
— $A$ et $B$ indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, (non nul si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).