BTS CRSA2. Correction de l'interrogation n° 3

Exercice 1 (2 points)
On pose les matrices $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer AB et BA.
Pour chaque produit, on posera les calculs justifiant la dernière colonne.

$A \times B = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Justification de la dernière colonne :
$c_{1,3} = -10 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times 4 = 2$.
$c_{2,3} = 1 \times 0 + (-3) \times 1 + 1 \times 4 = 1$.
$c_{3,3} = 0 \times 0 + 2 \times 1 + (-2) \times 4 = -6$.

$B \times A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \\ -17 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Justification de la dernière colonne :
$c_{1,3} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-2) = 0$.
$c_{2,3} = 0 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times (-2) = 1$.
$c_{3,3} = 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4 \times (-2) = -5$.

Exercice 2 (4 points)
On se propose de résoudre le système $\begin{cases} -4x + y + 0,1z & = & 1 \\ 11x - 3y - 0,2z & = & 1 \\ -6x + 2y + 0,1z & = & 2 \end{cases}$ à l'aide de matrices.

1. Préciser des matrices A, X et B de sorte le système soit équivalent à $AX = B$.
   $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Alors, le système revient à $AX = B$.
2. Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}$.
3. En déduire la résolution du système.
   Comme A est inversilble, le système a une seule solution, qui est donnée par $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 80 \end{pmatrix}$.
   Donc $x = 4$, $y = 9$, et $z = 80$.
   La solution est le triplet $(4; 9; 80)$.

Exercice 3 (4 points)
Une entreprise désire fabriquer de nouveaux jouets pour Noël : une poupée B et une poupée K. Elle désire commander les matières premières nécessaires pour la fabrication de ces jouets. On dispose des informations suivantes :
La fabrication d'une poupée B nécessite 0,094kg de coton biologique, 0,2kg de plastique végétal et 0,4kg de pièces métalliques.
La fabrication d'une poupée K nécessite 0,08kg de coton biologique, 0,3kg de plastique végétal et 0,1kg de pièces métalliques.
Par ailleurs, l'entreprise a réalisé les prévisions de ventes suivantes :

- elle pense vendre 1000 poupées B et 800 poupées K en novembre ;
- elle pense vendre 2500 poupées B et 1200 poupées K en décembre.

On pose les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,094 & 0,08 \\ 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1000 & 2500 \\ 800 & 1200 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A \times B$. On pourra donner le résultat sans justification.
   $A \times B = \begin{pmatrix} 158 & 331 \\ 440 & 860 \\ 480 & 1120 \end{pmatrix}$.

2. En déduire la quantité de coton biologique à commander pour le mois de décembre, et la quantité de plastique végétal pour le mois de novembre.
   Pour décembre, il faut prévoir 331 kg de coton biologique.
   Pour novembre, il faut prévoir 440 kg de plastique végétal.

Exercice 4 (3 points)
Compléter les tableaux.

1. Dérivée

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$f(x) = x^3 + x$	$3x^2 + 1$
$f(x) = \cos(5x)$	$-5\sin(5x)$
$f(x) = e^{4x}$	$4e^{4x}$
$f(x) = \ln(x)$	$\frac{1}{x}$

2. Primitive

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$
$f(x) = 2x + 5$	$x^2 + 5x$
$f(x) = e^{5x}$	$\frac{1}{5}e^{5x}$

Exercice 5 (intégration par parties, 7 points)

1. Compléter.
   Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont continues sur I, alors, quels que soient les réels a et b de I, on a :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [ux)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$
2. On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (4x-11)e^{4x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
   On pose $u'(x) = e^{4x}$ et $v(x) = 4x - 11$.
   (a) Préciser des expressions possibles pour $u(x)$ et $v'(x)$.
   $u(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$ et $v'(x) = 4$.
   (b) Calculer I.
$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{4}e^{4x} \times (4x-11)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}e^{4x} \times 4\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{4x} \times (4x-11)\right]_0^1 - \int_0^1 e^{4x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^4 \times (-7) - e^0 \times (-11)}{4} - \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-7e^4 + 11}{4} - \frac{e^4 - 1}{4} \\ &= \frac{-8e^4 + 12}{4} \\ &= -2e^4 + 3 \end{aligned}$$
3. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
   On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$.
   Alors, $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
$$\begin{aligned} I &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= e\ln(e) - 1\ln(1) - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x \\ &= e - 0 - [x]_1^e \\ &= e - (e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$