

Chapitre 10 : Angles orientés. Trigonométrie

I Le cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

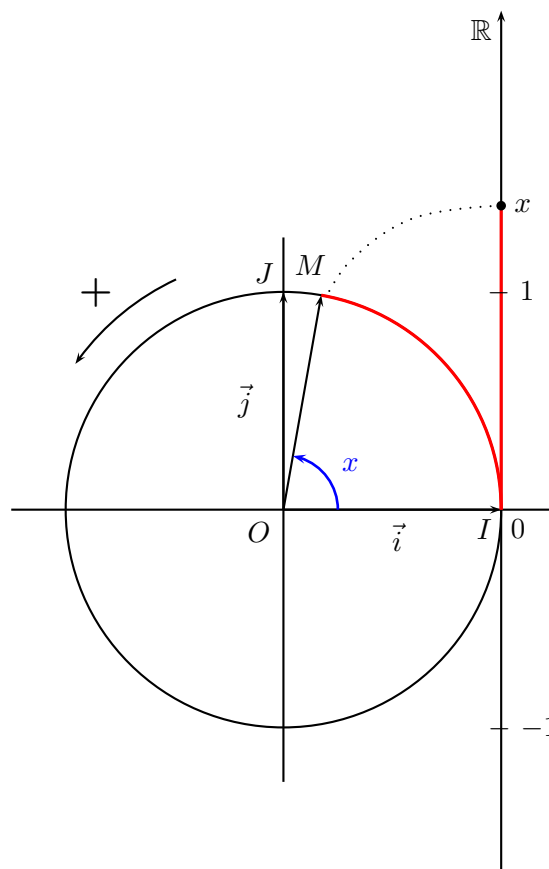
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I .

Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.

On dit que M est l'image de x sur le cercle, ou que x est une abscisse curviligne de M .

x est aussi une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.



Remarque

Lorsque $x \in [0; 2\pi[$, la mesure de l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ (en radians) est égale à la longueur de l'arc de cercle \widehat{OM} .

Remarque

Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc 2π . Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi leur différence est un multiple de 2π .

Les réels x et x' ont la même image ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$.

Notation et vocabulaire :

On dit alors que x est congru à x' modulo 2π et on note $x \equiv x' \pmod{2\pi}$.

Exercice 1

Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

Remarque (correspondance degré - radian)

degrés	360	180	90	60	45	30	20
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$

II Trigonométrie

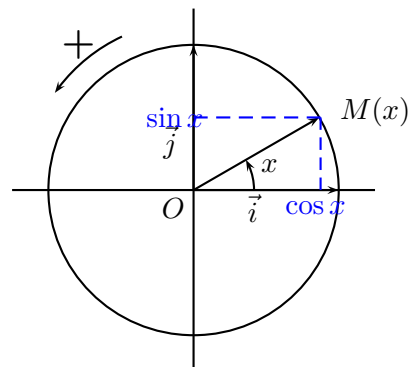
II.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons M l'image de x sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\cos x$.

Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\sin x$.



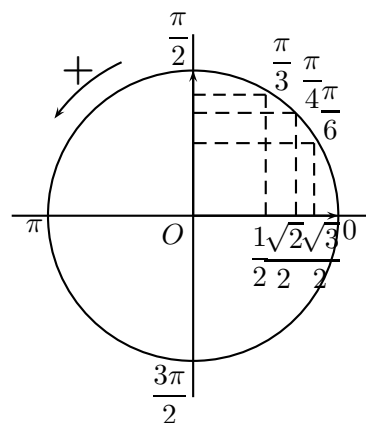
Propriété (conséquences immédiates)

Pour tout x réel, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

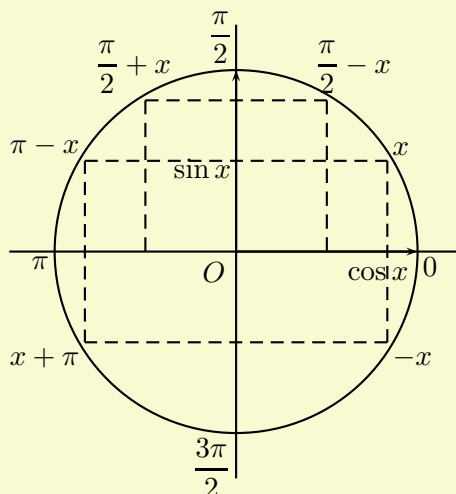


II.2 Angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x) \end{aligned}$$

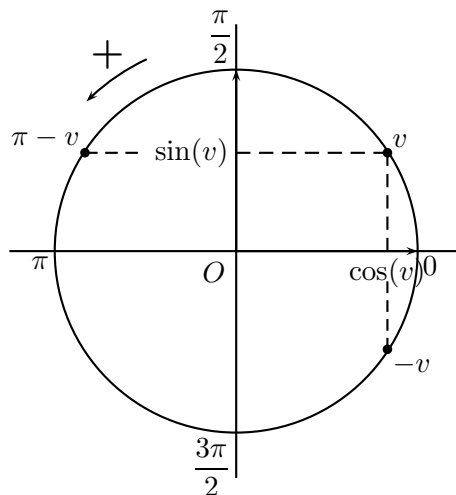


II.3 Équations trigonométriques

Propriété

Soient u et v deux nombres réels.

1. $\cos(u) = \cos(v)$ ssi (il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = v + k \times 2\pi$ ou $u = -v + k \times 2\pi$).
2. $\sin(u) = \sin(v)$ ssi (il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = v + k \times 2\pi$ ou $u = \pi - v + k \times 2\pi$).



Remarque

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Ainsi, pour tout réel a tel que $a > 1$ ou $a < -1$, les équations $\cos(x) = a$ et $\sin x = a$ n'ont pas de solution.

Par exemple, les équations $\cos(x) = 1,7$ et $\sin(x) = -2$ n'ont pas de solution réelle.

Dans les autres cas, on se ramène à la propriété précédente :

$$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k \times 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ u = -v + k \times 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k \times 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ u = \pi - v + k \times 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

III Angles orientés de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, on considère des vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, de sorte que l'angle de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v})$ soit bien défini.

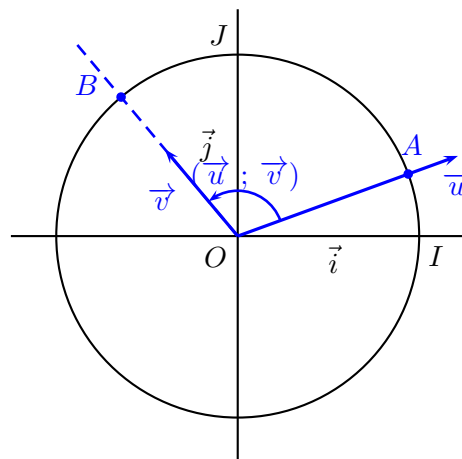
III.1 Mesures des angles orientés

Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Notons A et B les points d'intersection du cercle trigonométrique avec les demi-droites $[O; \vec{u})$ et $[O; \vec{v})$.

On appelle mesures de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ les nombres réels $b - a$ où :

a est une abscisse curviligne de A ,
 b est une abscisse curviligne de B .



Remarque (Cas particuliers)

- Angle nul : $(\vec{u}; \vec{u}) = 0 [2\pi]$.
- Angle plat : $(-\vec{u}; \vec{u}) = \pi [2\pi]$.
- Angle droit : \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Propriété

Si x est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v})$, alors toutes les mesures de $(\vec{u}; \vec{v})$ sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit $(\vec{u}; \vec{v}) = x [2\pi]$.

Démonstration

On reprend les notations de la définition. Considérons deux mesures $b - a$ et $b' - a'$ de $(\vec{u}; \vec{v})$.

Comme a et a' sont deux abscisses curvilignes du point A , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a' = a + 2n\pi$.

De même, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b' = b + 2m\pi$.

Alors, $b' - a' = b + 2m\pi - (a + 2n\pi) = b - a + 2(m - n)\pi$. $k = m - n \in \mathbb{Z}$.

Deux mesures de $(\vec{u}; \vec{v})$ diffèrent d'un multiple de 2π . □

Définition (Mesure principale)

Parmi toutes les mesures de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$, une seule appartient à l'intervalle $] -\pi; \pi]$. Cette mesure est la mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$.

Remarque (Lien avec les angles géométriques)

Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OA}; \vec{OB})$, alors $\widehat{AOB} = |\alpha|$. La valeur

absolue de la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OA}; \vec{OB})$ est la mesure (en radian)

de l'angle géométrique \widehat{AOB} .

En effet, la mesure d'un angle géométrique est toujours dans $[0; \pi]$.

Remarque (orientation d'une figure, d'un repère)

1. On dit qu'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est direct si $(\vec{i}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Il est indirect si $(\vec{i}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

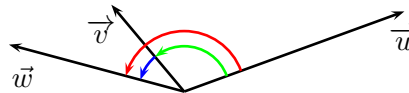
2. Un triangle ABC est direct si l'on passe par les points A, B, C dans cet ordre en tournant dans le sens direct, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ a une mesure principale positive (entre 0 et π).

III.2 Propriétés des angles orientés

Théorème (Relation de Chasles)

Quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} :

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w}) [2\pi]$$



Remarque

La relation de Chasles est peut être fautive avec des angles géométriques, elle est vraie seulement si les trois angles sont saillants (inférieurs à un angle plat).

Si la somme des deux mesures qu'on additionne dépasse π , la relation de Chasles est fautive.

Propriété (corollaire)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On a :

- $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$.
- $(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$.
- $(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$.
- Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls de même signe, $(k_1 \vec{u}; k_2 \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$.

Démonstration

- D'après la relation de Chasles, $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{u}) = (\vec{u}; \vec{u}) = 0 [2\pi]$. D'o $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$.
- Toujours avec la relation de Chasles, $(-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$ et comme $(-\vec{u}; \vec{u}) = \pi [2\pi]$, on a bien $(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$.
- On montre de même que $(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$.
- On peut se ramener aux cas où k_1 et k_2 sont égaux à ± 1 .

Si $k_1 = k_2 = -1$, on obtient :

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v}) [2\pi]$$

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi] = (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi].$$

Les autres cas sont évidents ou reprennent les points précédents dans la propriété.

La définition de $(\vec{u}; \vec{v})$ permet de se ramener à des vecteurs unitaires. □

Remarque

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0 [2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pi [2\pi].$$

On peut aussi le formuler de la façon suivante :

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0 [\pi]$.

2. Le triangle ABC est rectangle en A ssi $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Exercice 2

Déterminer une mesure d'un angle en utilisant les propriétés précédentes : [ressource 2654](#)